CE-003: Estatística II - Turma K/O
Avaliações Semanais (2^o semestre 2014)

Semana 3

1. Um modelo simplificado do sistema de tipo sanguíneo humano possui quatro tipos de sangue: A, B, AB e O. Existem dois antígenos, anti-A e anti-B que reagem com o sangue de uma pessoa de diferentes formas de acordo com o tipo sanguíneo do indivíduo. Anti-A reage com tipos sanguíneos A a AB, mas não com B e O. Anti-B reage com tipos sanguíneos B a AB, mas não com A e O. Suponha que uma amostra de sangue de uma pessoa é coletada e testada com os dois antígeos. Denote por A o evento que o sangue reage com anti-A e por B o evento que o sangue reage com anti-B.

   (a) Classifique os possíveis tipos de sangue da pessoa usando a notação de eventos A e B e seus complementares.

   Suponha agora que, para uma determinada pessoa, a probabilidade de possuir o tipo O é de 0,50, a probabilidade do tipo A é 0,34 e a probabilidade do tipo B é de 0,12.

   (b) Encontre a probabilidade de que ambos antígenos sejam reagentes com o sangue da pessoa.

   (c) Encontre a probabilidade de que cada um dos antígenos vá reagir com o sangue da pessoa.

   (d) Sabendo que o sangue de uma pessoa reagiu com anti-A, qual a probabilidade de que a pessoa tenha sangue do tipo AB?

   (e) Os eventos A e B são mutuamente exclusivos? Justifique.

   (f) Os eventos A e B são independentes? Justifique.

   Solução:
   Notação:

$$A : \text{a amostra reage a anti-}A$$
$$B : \text{a amostra reage a anti-}B$$

   (a)

Tabela 1: Tipos sanguíneos, eventos que os definem e probabilidades de cada tipo.

Tipo sanguíneo	Evento	Probabilidade
O	$A^c \cap B^c$	$0,50$
A	$A \cap B^c$	$0,34$
B	$A^c \cap B$	$0,12$
AB	$A \cap B$	$0,04$

   (b)

$$P[AB] = P[A \cap B] = 1 - P[O] - P[A] - P[B] = 0,04$$

   (c)

$$P[A] = P[A \cap B^c] + P[A \cap B] = 0,34 + 0,04 = 0,38$$
$$P[B] = P[A^c \cap B] + P[A \cap B] = 0,12 + 0,04 = 0,16$$

   (d)

$$P[(A \cap B)|P(A)] = \frac{P[(A \cap B) \cap (A)]}{P[A]} = \frac{P[(A \cap B)]}{P[A]} = \frac{0,04}{0,38} = 2/19 = 0.105$$

   (e) Não, pois $P[A \cap B] = 0,04 \neq 0$

   (f) Não, pois $P[A \cap B] = 0,04 \neq P[A] \cdot P[B] = 0,38 \cdot 0.16 = 0.0608$

Semana 4

1. Três algorítmos diferentes são utilizados, de forma independente, para tentar encontrar a solução ótima de um problema. Sabe-se que o primeiro algorítmo tem uma taxa de acerto de 75%, o segundo tem 60% e o terceiro tem 85%.

- Qual a probabilidade do problema ser resolvido?
- Qual a probabilidade de que a solução ótima seja encontrada por mais de um algorítmo?
- Qual a probabilidade de não seja encontrada a solução ótima de um problema submetido aos três algorítmos?

Procure usar a notação de eventos e operação de eventos no desenvolvimento de sua solução.

Solução:

(a)

$$\begin{aligned} A &: \text{o primeiro resolve o problema} \quad P(A) = 0,75 \quad P(\overline{A}) = 0,25 \\ B &: \text{o segundo resolve o problema} \quad P(B) = 0,60 \quad P(\overline{B}) = 0,40 \\ C &: \text{o terceiro resolve o problema} \quad P(C) = 0,85 \quad P(\overline{C}) = 0,15 \end{aligned}$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \stackrel{ind}{=} 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - (1-0,75)(1-0,60)(1-0,85) = 0.985$$

(b) $P(A \cap B \cap \overline{C}) + P(A \cap \overline{B} \cap C) + P(\overline{A} \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \stackrel{ind}{=} P[A] \cdot P[B] \cdot P[\overline{C}] + P[A] \cdot P[\overline{B}] \cdot P[C] + P[\overline{A}] \cdot P[B] \cdot P[C] + P[A] \cdot P[B] \cdot P[C] = 0,75 \cdot 0,60 \cdot 0.15 + 0,75 \cdot 0,40 \cdot 0.85 + 0,25 \cdot 0,60 \cdot 0.85 + 0,75 \cdot 0,60 \cdot 0.85 = 0.832$

(c) $P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \stackrel{ind}{=} P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C} = (1-0,75)(1-0,60)(1-0,85) = 0.015$

---

2. Sabe-se a partir de históricos que 25% das requisições de transferências de dados em um sistema são recusadas. Há interesse em se estudar possíveis padrões de falhas o que é feito contando-se o número de falhas consecutivas até o sucesso no envio.
   - Qual a probabilidade de que ocorram três ou mais falhas consecutivas em um tentativa de envio?
   - Identifique neste problema a variável aleatória de interesse e seus possíveis valores
   - Mostre as probabilidades associadas a alguns dos valores desta variável.
   - Identifique uma equação que forneça os valores das probabilidades para os diferentes valores da variável.

Solução:
Eventos:

$$\begin{aligned} S &: \text{ sucesso na transferência} \\ F \equiv \overline{S} &: \text{ falha na transferência} \end{aligned}$$

OBS: supõem-se independência entre as tentativas.

(a)

$$\begin{aligned} P[3 \text{ ou mais falhas}] &= 1 - P[2 \text{ ou menos falhas}] = P[0 \text{ falhas}] + P[1 \text{ falha}] + P[2 \text{ falhas}] \\ &= 1 - \{P[S] + P[F \cap S] + P[F \cap F \cap S]\} = 1 - [0,75 + 0,25 \cdot 0,75 + 0,25^2 \cdot 0,75] = 0.484 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} X &: \text{número de falhas até conseguir o envio} \\ & x \in \{0,1,2,3,4,\ldots\} \end{aligned}$$

(c)

x	0	1	2	3	...
P[X=x]	$0,75$	$0,25 \cdot 0,75$	$0,25^2 \cdot 0,75$	$0,25^3 \cdot 0,75$	...

(d) $P[X = x] = 0,25^x 0,75$

De forma mais geral a variável segue a distribuição chamada de *geométrica* com probabilidade p de sucesso:

$$\begin{aligned} X &: \text{número de “falhas” até o primeiro “sucesso”} \\ x &\in \{0,1,2,3,4,\ldots\} \\ X &\sim \mathrm{G}(p) \\ P[X = x] &= (1-p)^x p \end{aligned}$$