

CE-003: Estatística II - Turma K/O

Avaliações Semanais (2º semestre 2016)

Semana 2 (av-01)

1. Dezesesseis equipes irão disputar um torneio de jogos eliminatórios. As equipes são sorteadas para ocupar as posições iniciais da chave de jogos pré-definida. As equipes perdedoras da penúltima etapa fazem um jogo para disputar a terceira colocação e as vencedoras disputam para definir a primeira e segunda colocações. Ao final são atribuídas medalhas (ouro, prata e bronze) às três primeiras colocadas.

- (a) As regras do torneio são “justas” em relação a possibilidade de vitórias das equipes?
- (b) Quantas possíveis configurações de equipes medalhistas podem ocorrer (sem considerar a classificação entre as três primeiras)?
- (c) E considerando a classificação?

Considerando que as equipes possuem chance igual de vitória em cada jogo.

- (d) Qual a probabilidade de uma determinada equipe vencer o torneio?
- (e) Qual a probabilidade de uma determinada equipe conseguir uma medalha?
- (f) Se um país concorre com duas equipes, qual a probabilidade de que o país tenha alguma medalhista?

Agora considerando que as equipes possuem níveis técnicos diferentes.

- (g) As probabilidades calculadas nos três itens anteriores seriam diferentes?
- (h) Sugira algum procedimento para calcular tais probabilidades.

Solução:

- (a) Sim. A partir do sorteio todos tem a mesma probabilidade (1/16) de vencer.
- (b) Quantas possíveis configurações de equipes medalhistas podem ocorrer (sem considerar a classificação entre as três primeiras)?
- (c) E considerando a classificação?

Considerando que as equipes possuem chance igual de vitória em cada jogo.

- (d) Cada time tem que jogar e vencer quatro partidas para vencer. Sob a probabilidade de 1/2 de vencer cada partida a probabilidade de vencer o torneio fica:

$$P[V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4] = P[V_1] \cdot P[V_2] \cdot P[V_3] \cdot P[V_4] = (1/2)^4 = 1/16 = 0,0625$$

Outro argumento é o de que, se o torneio é “justo” todos têm a mesma probabilidade de vitória e portanto como são 16 equipes a probabilidade de cada uma vencer é de 1/16.

- (e) $P[\text{medalha}] = P[\text{ouro} \cup \text{prata} \cup \text{bronze}] \stackrel{Mut.Exc.}{=} P[\text{ouro}] + P[\text{prata}] + P[\text{bronze}] = 1/16 + 1/16 + 1/16 = 3/16 = 0,1875$
- (f) Sendo as equipes A e B e denotando por $P[A]$ e $P[B]$ suas respectivas probabilidades de medalha seria necessário calcular:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

Note-se que os eventos não são mutuamente exclusivos nem independentes. Seriam mutuamente exclusivos se fosse uma particular medalha (ouro, prata ou bronze).

- (g) Sim, pois em cada partida a probabilidade de vitória de cada equipe não seria mais 1/2
- (h) Seria necessário conhecer as probabilidades de vitória de cada equipe em cada um dos possíveis confrontos. Tais probabilidades poderiam ser modeladas como função da posição das equipes em algum “ranking”.

Semana 3 (av-02)

1. Em um teste de segurança, dois indivíduos tentam invadir um sistema. A probabilidade do primeiro conseguir é de 0,20 e do segundo 0,12. Faça suposição(ões) necessária(s) e responda:

- (a) Qual a probabilidade de ambos invadirem o sistema?
- (b) Qual a probabilidade do sistema não ser invadido?
- (c) Qual(ais) suposição(ões) foi(ram) feita(s)?

Solução:

Notação:

 A : primeiro indivíduo invade o sistema B : segundo indivíduo invade o sistema

(a) $P[A \cap B] \stackrel{ind}{=} P[A] \cdot P[B] = 0,20 \cdot 0,12 = 0,024$

(b) $P[\bar{A} \cap \bar{B}] \stackrel{ind}{=} P[\bar{A}] \cdot P[\bar{B}] = 0,80 \cdot 0,88 = 0,704$

Solução alternativa:

$$1 - P[A \cup B] = 1 - [P[A] + P[B] - P[A \cap B]] \stackrel{ind}{=} 1 - (P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B]) = 1 - (0,20 + 0,12 - 0,20 \cdot 0,12) = 0,704$$

(c) Suposição de independência entre os eventos A consegue invadir e B consegue invadir.

2. Uma determinada doença atinge um a cada 40.000 indivíduos de uma população. Um teste para detectar a doença fornece resultados corretos em 98% dos exames.

(a) Se um indivíduo é selecionado ao acaso da população para fazer o teste e o resultado é positivo, qual a probabilidade de que de fato tenha a doença?

(b) A probabilidade seria a mesma caso um indivíduo fizesse o teste por indicação de um médico, após um exame clínico no qual o médico suspeitou da doença. Justifique sua resposta.

Solução:

Notação e dados:

 D : indivíduo possui doença \bar{D} : indivíduo não possui doença P : teste positivo N : teste negativo

$$P[D] = 1/40000 \quad P[\bar{D}] = 39999/40000$$

$$P[P|D] = 0,98 \quad P[N|D] = 0,02$$

$$P[N|\bar{D}] = 0,98 \quad P[P|\bar{D}] = 0,02$$

(a) $P[D|P] = \frac{P[P|D]P[D]}{P[P|D]P[D] + P[P|\bar{D}]P[\bar{D}]} = \frac{0,98 \cdot (1/40000)}{0,98 \cdot (1/40000) + 0,02 \cdot (39999/40000)} = 0,001224$

(b) Não pois nesta subpopulação de indivíduos com sintomas clínicos a probabilidade de doença não é mais $1/40000$.Por exemplo, supondo que registros mostrem que 40% dos indivíduos com sintomas clínicos de fato possuem a doença (e então $P[D] = 0,4$), a probabilidade um indivíduo testado positivo ter a doença seria:

$$P[D|P] = \frac{P[P|D]P[D]}{P[P|D]P[D] + P[P|\bar{D}]P[\bar{D}]} = \frac{0,98 \cdot 0,4}{0,98 \cdot 0,4 + 0,02 \cdot 0,6} = 0,9703$$

Semana 4 (av-03)

1. Uma variável aleatória tem função de densidade de probabilidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} Kx & \text{para } 0 < x < 5 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

(a) Obtenha o valor de K .(b) Obtenha $P[X < 2]$.(c) Obtenha $P[1,5 < X \leq 3]$.(d) Obtenha $P[X \geq 2,5]$.(e) Obtenha o valor médio de X .(f) Obtenha a expressão de $P[X < x]$ para um valor qualquer de x .**Solução:**

(a)

$$\begin{aligned}\int_0^5 f(x)dx &= 1 \\ \int_0^5 Kxdx &= 1 \\ K \frac{x^2}{2} \Big|_0^5 &= 1 \\ K \frac{5^2 - 0^2}{2} &= 1 \\ K &= \frac{2}{25} = 0,08\end{aligned}$$

(b) $P[X < 2] = \int_0^2 0,08xdx = 0,08 \frac{2^2 - 0^2}{2} = 0,16$.

(c) $P[1,5 < X \leq 3] = \int_{1,5}^3 0,08xdx = 0,08 \frac{3^2 - (1,5)^2}{2} = 0,27$.

(d) $P[X \geq 2,5] = \int_{2,5}^5 0,08xdx = 0,08 \frac{5^2 - (2,5)^2}{2} = 0,75$.

(e) $E[X] = \int_0^5 x \cdot (0,08x)dx = 0,08 \frac{5^3 - 0^3}{3} = 3,33$.

(f) $F(x) = P[X < x] = \int_0^x 0,08xdx = 0,08 \frac{x^2 - 0^2}{2} = 0,04x^2$.

Observação: as probabilidades anteriores poderiam ter sido calculadas à partir da expressão de $F(x)$:

(b) $P[X < 2] = F(2) = 0,042^2 = 0,16$.

(c) $P[1,5 < X \leq 3] = F(3) - F(1,5) = 0,043^2 - 0,041,5^2 = 0,36 - 0,09 = 0,27$.

(d) $P[X \geq 2,5] = 1 - F(2,5) = 1 - 0,042,5^2 = 1 - 0,25 = 0,75$.

Gráficos das funções e solução computacional (utilizando a linguagem R):

```
> fx <- function(x) ifelse(x > 0 & x < 5, 0.08 * x, 0)
> Fx <- function(x) {y <- ifelse(x > 0 & x < 5, 0.04 * x^2, 0); y[x>5] <- 1; return(y)}
> curve(fx, from=-1, to=6, xlab="x", ylab="f(x)")
> curve(Fx, from=-1, to=6, xlab="x", ylab="F(x)")
```

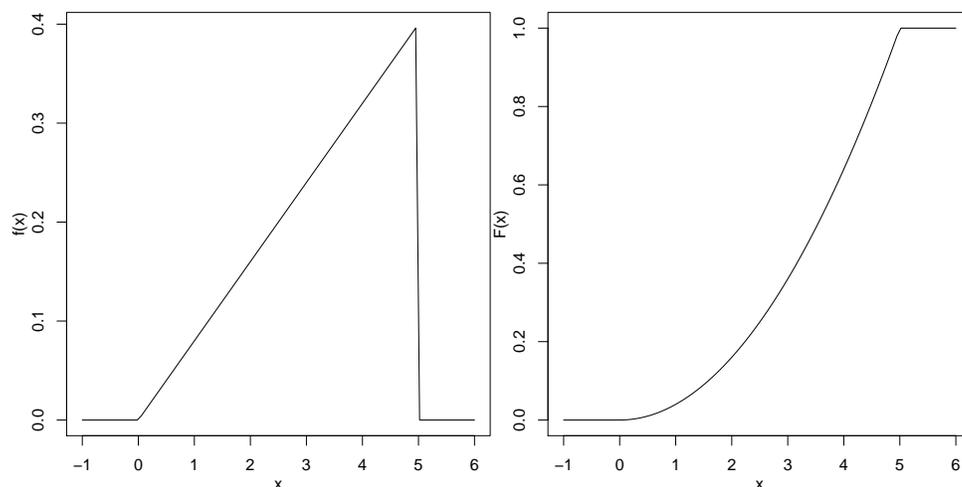


Figura 1: Funções de densidade de probabilidade $f(x)$ (esquerda) e de probabilidade acumulada $F(x)$ (direita)

Cálculos das probabilidade por integração de $f(x)$ e por $F(x)$

```
> #(b)
> integrate(fx, 0, 2)$value
[1] 0.16
> Fx(2)
[1] 0.16
> #(c)
> integrate(fx, 1.5, 3)$value
[1] 0.27
> Fx(3) - Fx(1.5)
```

```
[1] 0.27
> #(d)
> integrate(fx, 2.5, 5)$value
[1] 0.75
> 1-Fx(2.5)
[1] 0.75
```

2. Registros mostram que em um determinado site de vendas são efetuadas, em média, 3,2 transações por dia. Além disto verificou-se que a distribuição de Poisson, com função de probabilidade dada por:

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

é adequada para descrever o número de vendas diárias.

- Sabe-se que para distribuição de Poisson $E[X] = \lambda$. Desta forma, qual a probabilidade de que em um dia o número de transações fique abaixo da média?
- Qual a probabilidade de que não haja transações em um determinado dia?
- Qual a probabilidade de que haja pelo menos duas transações em um determinado dia?
- Qual a probabilidade de que se passem dois dias consecutivos sem transações?
- Qual a probabilidade de que se tenha três dias consecutivos com número de transações abaixo da média antes que se tenha um dia com número maior que a média?

Solução:

Notação:

X : número de transações diárias no site

$X \sim P(\lambda = 3, 2)$

$$P[X = x] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

- $P[X \leq 3] = P[X = 0] + P[X = 1] + P[X = 2] + P[X = 3] = \sum_{i=1}^n \frac{e^{-3,2} 3,2^i}{i!} = 0.6025$
- $P[X = 0] = \frac{e^{-3,2} 3,2^0}{0!} = e^{-3,2} = 0.04076$
- $P[X \geq 2] = 1 - P[X < 2] = 1 - (P[X = 0] + P[X = 1]) = 1 - e^{-3,2}(1 + 3,2) = 0.8288$
- $P[X_1 = 0 \cap X_2 = 0] \stackrel{ind}{=} P[X_1 = 0] \cdot P[X_2 = 0] = e^{-3,2} \cdot e^{-3,2} = 0.001662$

Solução alternativa:

Y_1 : número de transações em dois dias no site

$Y_1 \sim P(\lambda = 2 \cdot 3, 2 = 6, 4)$

$$P[Y_1 = 0] = \frac{e^{-6,4} 6,4^0}{0!} = 0.001662$$

- $P[\cdot] = P[X \leq 3]^3 \cdot P[X > 3] = 0.08694$

Solução alternativa:

Y_2 : número de dias com transação abaixo da média até o primeiro dia com transações acima da média

$Y_2 \sim G(p = P[X > 3] = 0.3975)$

$$P[Y_2 = y] = (1 - p)^x \cdot p = (0.6025)^3 \cdot 0.3975 = 0.08694$$

Soluções computacionais com o programa R:

```
> (pa <- ppois(3, lambda=3.2))
[1] 0.6025
> (pb <- dpois(0, lambda=3.2))
[1] 0.04076
> (pc <- ppois(1, lambda = 3.2, lower=F))
[1] 0.8288
> (pd <- dpois(0, lambda=6.4))
[1] 0.001662
```

```
> (pe <- dgeom(3, prob=1-pa))
```

```
[1] 0.08694
```

Semana 5 (av-04)

1. Um indivíduo vai participar de uma competição que consiste em responder questões que são lhe são apresentadas sequencialmente. Com o nível de conhecimento que possui, a chance de acertar uma questão escolhida ao acaso é de 75%. Neste contexto, para cada diferente situação apresentada a seguir, defina a variável aleatória, sua distribuição de probabilidades e calcule a probabilidade solicitada. Se preciso, faça suposições necessárias e adequadas em cada caso.

- (a) Se for responder até errar uma pergunta, qual a probabilidade de conseguir acertar quatro ou mais questões?
- (b) Se for responder cinco perguntas, qual a probabilidade de acertar quatro ou mais?
- (c) Se for responder até acertar a terceira pergunta, qual a probabilidade de errar apenas uma?
- (d) Se o candidato selecionar aleatoriamente seis questões de um banco de 40 questões das quais o candidato sabe a resposta de 30 delas (75%), qual a probabilidade de acertar ao menos cinco delas.

Ainda neste contexto considere que o candidato responde, em média, 1,8 questões por minuto.

- (e) Qual a probabilidade de conseguir responder ao menos três questões em três minutos?
- (f) Qual a probabilidade de que o tempo para resposta de uma questão seja superior a 40 segundos?

Solução:

(a)

X : Número de acertos até o primeiro erro

$X \sim G(0, 25)$

$$P[X \geq 4] = 1 - P[X \leq 3] = 1 - \sum_{i=0}^3 (1 - 0,25)^i (0,25) = 0.316$$

(b)

X : Número de acertos em cinco perguntas

$X \sim B(n = 5, p = 0,75)$

$$P[X \geq 4] = P[X = 4] + P[X = 5] = \sum_{i=4}^5 \binom{5}{i} 0,75^i (1 - 0,75)^{5-i} = 0.633$$

(c)

X : Número de erros até o terceiro acerto

$X \sim BN(r = 3, p = 0,75)$

$$P[X = 1] = \binom{3+1-1}{3-1} 0,75^3 (1 - 0,75)^1 = 0.316$$

(d)

X : Número de acertos nas seis questões selecionadas

$X \sim HG(30, 10, 6)$

$$P[X \geq 5] = P[X = 5] + P[X = 6] = \sum_{i=5}^6 \frac{\binom{30}{i} \binom{10}{6-i}}{\binom{40}{6}} = 0.526$$

(e)

X : Número de questões respondidas em 3 minutos

$X \sim P(3 \cdot 1,8 = 5,4)$

$$P[X \geq 3] = 1 - P[X \leq 2] = 1 - \sum_{i=0}^2 \frac{e^{-5,4} 5,4^i}{i!} = 0.905$$

(f)

X : tempo (em min.) para responder uma questão

$X \sim \text{Exp}(\lambda = 1, 8)$

$$P[X \geq 40/60] = \int_{40/60}^{\infty} 1,8e^{-1,8x} dx = 0.301$$

Soluções computacionais com o programa R:

```
> (pa <- pgeom(3,p=0.25, lower=F))
[1] 0.3164
> (pb <- pbinom(3, size=5, prob=0.75, lower=F))
[1] 0.6328
> (pc <- dnbinom(1, size=3, prob=0.75))
[1] 0.3164
> (pd <- phyper(4, m=30, n=10, k=6, lower=F))
[1] 0.526
> (pe <- ppois(2, lam=5.4, lower=F))
[1] 0.9052
> (pf <- pexp(40/60, rate=1.8, lower=F))
[1] 0.3012
```

-
2. Assume-se que o tempo entre acessos a um blog tem uma distribuição exponencial com média de 1,5 segundos.
- (a) Qual a probabilidade de haver duas conexões com intervalo inferior a 1,5 segundos?
 - (b) Qual a probabilidade de se passarem 5 segundos sem conexão alguma?
 - (c) Tendo havido uma conexão, qual a probabilidade da próxima conexão ocorrer entre 0,5 e 2,5 segundos?
 - (d) Se já se passou 1 segundo sem conexão, qual a probabilidade de se passar mais 0,5 segundos adicionais sem conexão?
 - (e) Qual a probabilidade do intervalo entre conexões não superar 3,5 segundos se já se passaram 2 segundos sem conexão?

Solução:

X : intervalo de tempo entre conexões (segundos)

$X \sim \text{Exp}(\lambda = 1/1,5 = 2/3)$

$$f(x) = \frac{2}{3}e^{-2x/3} \mathbf{I}_{(0,\infty)}(x) \quad F(x) = 1 - e^{-2x/3}$$

- (a) $P[X < 1,5] = \int_0^{1,5} f(x)dx = F(1,5) = 0.63$
- (b) $P[X > 5] = \int_5^{\infty} f(x)dx = 1 - F(5) = 0.036$
- (c) $P[X < 0,5] = \int_0^{2,5} f(x)dx = F(2,5) - F(0,5) = 0.53$
- (d) $P[X > 1,5|X > 1] = \frac{\int_{1,5}^{\infty} f(x)dx}{\int_1^{\infty} f(x)dx} = {}^1P[X > 0,5] = 1 - F(0,5) = 0.72$
- (e) $P[X < 3,5|X > 2] = \frac{\int_2^{3,5} f(x)dx}{\int_2^{\infty} f(x)dx} = \frac{F(3,5)-F(2)}{1-F(2)} = {}^1P[X < 1,5] = F(1,5) = 0.63$

Soluções computacionais com o programa R:

```
> (pa <- pexp(1.5, rate=2/3))
[1] 0.6321
> (pb <- pexp(5, rate=2/3, lower=F))
[1] 0.03567
> (pc <- diff(pexp(c(0.5,2.5), rate=2/3)))
[1] 0.5277
```

¹propriedade de falta de memória da exponencial

```
> (pd <- pexp(0.5, rate=2/3, lower=F))
```

```
[1] 0.7165
```

```
> (pe <- pexp(1.5, rate=2/3))
```

```
[1] 0.6321
```

Semana 7 (av-05)

1. Seja uma v.a. X com distribuição normal de média $\mu = 250$ e variância $\sigma^2 = 225$. Obtenha:

(a) $P[X > 270]$.

(b) $P[X < 220]$.

(c) $P[|X - \mu| > 25]$.

(d) $P[|X - \mu| < 30]$.

(e) $P[X < 270 | X > 250]$.

(f) o valor x_1 tal que $P[X > x_1] = 0,80$.

(g) o valor x_2 tal que $P[X < x_2] = 0,95$.

(h) qual deveria ser um novo valor da média μ para que $P[X < 240] \leq 0,10$?

(i) com $\mu = 250$ qual deveria ser um novo valor da variância σ^2 para que $P[X < 240] \leq 0,10$?

(j) qual deveria ser um novo valor da variância σ^2 para que $P[|X - \mu| > 15] \leq 0,10$?

Solução:

$$X \sim N(250, 15^2)$$

(a) $P[X > 270] = P[Z > \frac{270-250}{15}] = P[Z > 1.3333] = 0.0912$

(b) $P[X < 220] = P[Z < \frac{220-250}{15}] = P[Z < -2] = 0.0228$

(c) $P[|X - \mu| > 25] = P[X < 225 \cup X > 275] = P[Z < -1.667] + P[Z > 1.667] = 0.0956$

(d) $P[|X - \mu| < 30] = P[220 < X < 280] = P[-2 < Z < 2] = 0.9545$

(e) $P[X < 270 | X > 250] = \frac{P[250 < X < 270]}{P[X > 250]} = \frac{0.4088}{0.5} = 0.8176$

(f) $z = \frac{x_1 - 250}{15} = -0.842 \rightarrow x_1 = 237.4$

(g) $z = \frac{x_2 - 250}{15} = 1.645 \rightarrow x_2 = 274.7$

(h) $z = \frac{240 - \mu}{15} = -1.282 \rightarrow \mu = 259.2$

(i) $z = \frac{240 - 250}{\sigma} = -1.282 \rightarrow \sigma = 7.8 \rightarrow \sigma^2 = 60.8$

(j) $P[|X - \mu| > 15] = P[X < \mu - 15 \cup X > \mu + 15] \leq 0,10 \rightarrow z = \frac{15}{\sigma} = 1.645 \rightarrow \sigma = 9.1 \rightarrow \sigma^2 = 83.1$

Comandos em R para soluções:

```
> (qa <- pnorm(270, mean=250, sd=15, lower=FALSE))
```

```
[1] 0.09121
```

```
> (qb <- pnorm(220, mean=250, sd=15))
```

```
[1] 0.02275
```

```
> (qc <- 2*pnorm(250-25, mean=250, sd=15))
```

```
[1] 0.09558
```

```
> (qd <- diff(pnorm(c(250-30,250+30), mean=250, sd=15)))
```

```
[1] 0.9545
```

```
> (qe <- diff(pnorm(c(250,270), mean=250, sd=15))/pnorm(250, mean=250, sd=15, lower=FALSE))
```

```
[1] 0.8176
```

```
> (qf <- qnorm(0.80, mean=250, sd=15, lower=FALSE))
```

```
[1] 237.4
```

```
> (qg <- qnorm(0.95, mean=250, sd=15))
```

```
[1] 274.7
```

```
> (qh <- 240 - 15 * round(qnorm(0.10), dig=3))
```

```
[1] 259.2
```

```
> (qi <- (240 - 250)/round(qnorm(0.10), dig=3))
```

[1] 7.8

```
> (qj <- 15/round(qnorm(0.95), dig=3))
```

[1] 9.119

Semana 8 (av-06)

1. O volume de dados transmitido por dia em uma rede são independentes e possuem distribuição normal com média de 240 e variância de 900 unidades.
 - (a) Em quantos dias por ano (365 dias) espera-se que o volume de dados transmitido ultrapasse 300 unidades?
 - (b) Qual o volume deve ser transmitido em pelo menos 75% dos dias?
 - (c) Adota-se como dias *usuais* os que possuem valores ao redor da média em 80% dias dias. Quais volumes determinam esses limites?
 - (d) Qual a probabilidade do volume total transmitido em uma semana estar acima de 1800 unidades?
 - (e) Qual a probabilidade do volume de transmissão estar acima de 265 unidades em cinco dias consecutivos?
 - (f) Qual a probabilidade do volume diário não ultrapassar 250 unidades nenhuma vez em uma semana?
 - (g) Partindo de um dia qualquer, qual a probabilidade de ser necessário esperar mais que 3 dias para que o volume diário ultrapasse 280 unidades?
 - (h) Atribui-se um custo por uso da banda de 10 u.m. (unidades monetárias) para dias com volume abaixo de 200 unidades, 15 u.m. para dias com volume entre 200 e 250, 20 u.m. para dias com volume entre 250 e 280 u.m. e 30 u.m. para dias com volume acima de 280 u.m..
 - i. Monte a distribuição de probabilidades do custo diário.
 - ii. Qual o custo esperado em um mês (30 dias)?

Dica: em um item acima pode-se usar o seguinte resultado:

Se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ e X_1, X_2, \dots, X_n são independentes, então $\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n \cdot \mu, n \cdot \sigma^2)$.

Solução:

$$X \sim N(\mu = 240, \sigma^2 = 900)$$

(a) $365 \cdot P[X > 300] = 365 \cdot P[Z > \frac{300-240}{30}] = 365 \cdot P[Z > 2] = 365 \cdot 0.02275 = 8.304$

(b) $P[X > x_b] = 0,75 \rightarrow z = -0.6745 = \frac{x_b-240}{30} \rightarrow x_b = 219.8$

(c) $P[-x_c < X < x_c] = P[\mu - k < X < \mu + k] = P[-k/30 < Z < k/30] = 0,80 \rightarrow z = 1.28 = \frac{x_c-240}{30} \rightarrow x_c = 278.4$

(d) $P[\sum_{i=1}^7 X_i > 1800] = P[Z > \frac{1800-7 \cdot 240}{30\sqrt{7}}] = P[Z > 1.512] = 0.0653$

(e) (Sob independência) $(P[X > 265])^5 = (P[Z > \frac{265-240}{30}])^5 = (P[Z > 0.833])^5 = (0.2023)^5 = 0.0003391$

(f) (Sob independência) $(P[X < 250])^7 = (P[Z < \frac{250-240}{30}])^7 = (P[Z < 0.333])^7 = (0.7977)^7 = 0.03963$

(g)

$Y \sim$ número de dias antes do dia que ultrapassa 280

$$Y \sim G(p = P[X > 280] = P[Z > \frac{280 - 240}{30}] = P[Z > 1.333] = 0.09121)$$

$$P[Y > 3] = 1 - P[Y \leq 3] = 1 - (P[Y = 0] + P[Y = 1] + P[Y = 2] + P[Y = 3]) = 0.3801$$

(h) i.

Y : custo diário

y	10	15	20	30
P[Y=y]	P[X < 200]	P[200 < X < 250]	P[250 < X < 280]	P[X > 280]
	P[Z < -1.33]	P[-1.33 < Z < 0.333]	P[0.333 < Z < 1.33]	P[Z > 1.33]
	0.0912	0.539	0.278	0.0912

ii. $30 \cdot E[Y] = 30 \cdot \sum y_i P[Y = y_i] = 30 \cdot (10 \cdot 0.0912 + 15 \cdot 0.539 + 20 \cdot 0.278 + 30 \cdot 0.0912) = 30 \cdot 17.3 = 519.1$

Solução Computacional:

```
> # a)
```

```
> (qa <- 365*pnorm(300, m=240, sd=30, lower=FALSE))
```

[1] 8.304

```

> # b)
> (qb <- qnorm(0.25, m=240, sd=30))
[1] 219.8
> # c)
> (qc <- qnorm(c(0.1, 0.9), m=240, sd=30))
[1] 201.6 278.4
> # d)
> (qd <- pnorm(1800, m=240*7, sd=sqrt(7)*30, lower=FALSE))
[1] 0.06529
> ## ou
> (qd1 <- pnorm(1800/7, m=240, sd=30/sqrt(7), lower=FALSE))
[1] 0.06529
> # e)
> (pe <- pnorm(265, m=240, sd=30, lower=FALSE)); (qe <- pe^5)
[1] 0.2023
[1] 0.0003391
> # f)
> (pf <- pnorm(250, m=240, sd=30)); (qf <- pf^7)
[1] 0.6306
[1] 0.03963
> # g)
> (pg <- pgeom(4, prob=pnorm(280, m=240, sd=30, low=F)))
[1] 0.3801
> ##
> Pr <- diff(pnorm(c(-Inf, 200, 250, 280, Inf), m=240, sd=30))
> names(Pr) <- c(10,15,20,30)
> # h1)
> (qg1 <- Pr)
      10      15      20      30
0.09121 0.53935 0.27823 0.09121
> # h2)
> (qg2 <- 30*sum(Pr * c(10,15,20,30)))
[1] 519.1

```

Semana 10 (av-07)

1. Seja uma variável aleatória X com distribuição uniforme² : $X \sim U[0, 1]$ e seja uma variável definida por $Y = X^2$. Encontre a função de densidade de probabilidade de Y e esboce os gráficos de $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

$$\begin{aligned}
 X &\sim U[0, 1] \\
 f_X(x) &= \frac{1}{1-0} = 1 \mathbb{I}_{[0,1]}(x) \\
 Y &= h(x) = X^2 \text{ (função monótona crescente em } [0, 1]) \\
 X &= h^{-1}(y) = \sqrt{y} \\
 \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
 x = 0 &\rightarrow y = 0; x = 1 \rightarrow y = 1 \rightarrow \mathbb{I}_{[0,1]}(y) \\
 f_Y(y) &= f_X(h^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| = 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \\
 \text{logo, } f_Y(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \mathbb{I}_{[0,1]}(y)
 \end{aligned}$$

Gráficos das densidades e (10.000) simulações.

²lembrando que se $X \sim U[a, b]$, $f_X(x) = 1/(b - a)$.

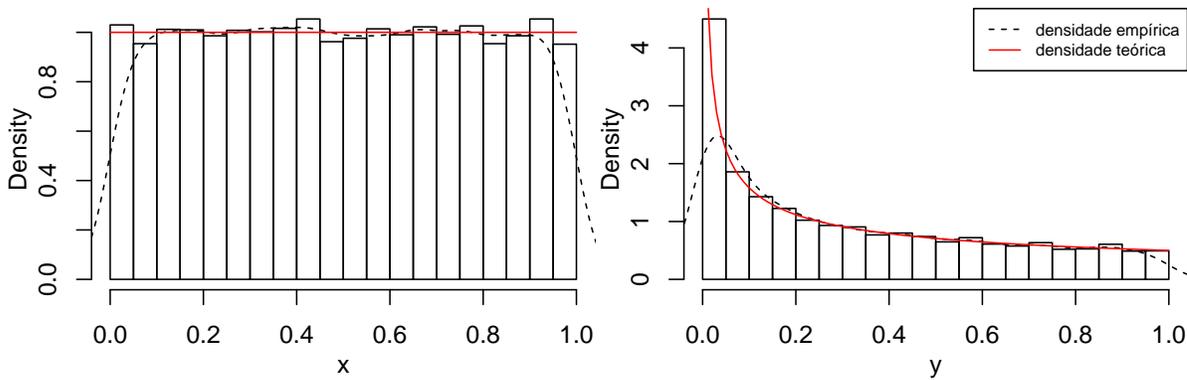


Figura 2: Gráficos com linhas das densidades de X (esquerda) e Y (direita) e histogramas e densidades empíricas (linha tracejada) de 10.000 simulações das variáveis X e Y .

Comandos do programa R para gerar o gráfico das distribuições:

```
> x <- runif(10000)
> y <- x^2
> par(mfrow=c(1,2), mar=c(3,3,0,0), mgp=c(2,1,0))
> hist(x, prob=TRUE, main="")
> lines(density(x), lty=2)
> curve(dunif(x), from=0, to=1, col=2, lty=1, add=TRUE)
> hist(y, prob=TRUE, main="")
> lines(density(y), lty=2)
> fy <- function(y){1/(2*sqrt(y))}
> curve(fy, from=0, to=1, col=2, lty=1, add=TRUE)
> legend("topright", c("densidade empírica", "densidade teórica"), lty=c(2,1), cex=0.7, col=1:2)
```

2. O conjunto de dados *studentdata* do pacote **LearnBayes** do programa **R** contém os registros de 657 questionários aplicados à estudantes. A tabela a seguir mostra os 10 primeiros registros dos questionários.

Estudante	Altura	Sexo	Sapatos	Numero	DVDs	Dormiu	Acordou	Cabelo	Trabalho	Bebida
1	1	67 female	10	5	10	-2.5	5.5	60	30.0	water
2	2	64 female	20	7	5	1.5	8.0	0	20.0	pop
3	3	61 female	12	2	6	-1.5	7.5	48	0.0	milk
4	4	61 female	3	6	40	2.0	8.5	10	0.0	water
5	5	70 male	4	5	6	0.0	9.0	15	17.5	pop
6	6	63 female	NA	3	5	1.0	8.5	25	0.0	water
7	7	61 female	12	3	53	1.5	7.5	35	20.0	water
8	8	64 female	25	4	20	0.5	7.5	25	0.0	pop
9	9	66 female	30	3	40	-0.5	7.0	30	25.0	water
10	10	65 male	10	7	22	2.5	8.5	12	0.0	milk

As colunas se referem às seguintes questões:

- Estudante: número do estudante
 - Altura: altura em polegadas
 - Sexo: sexo (Masculino/Feminino)
 - Sapatos: número de pares de sapato que possui
 - Numero: um número escolhido entre 0 e 10
 - DVDs: número de DVD's de filmes que possui
 - Dormiu: hora que foi dormir na noite anterior (em relação à meia noite)
 - Acordou: hora que acordou na manhã seguinte
 - Cabelo: custo do último corte de cabelo
 - Trabalho: número de horas (semanais) de trabalho
 - Bebida: bebida usual na janta (água, leite, suco/refrigerante)
- (a) Considere os gráficos mostrados nas figuras a seguir. Para cada um deles comente sua interpretação, se o gráfico é ou não o mais adequado e, caso não seja, esboce o gráfico que seria mais adequado.
- (b) Interprete os gráficos e resultados neles mostrados.

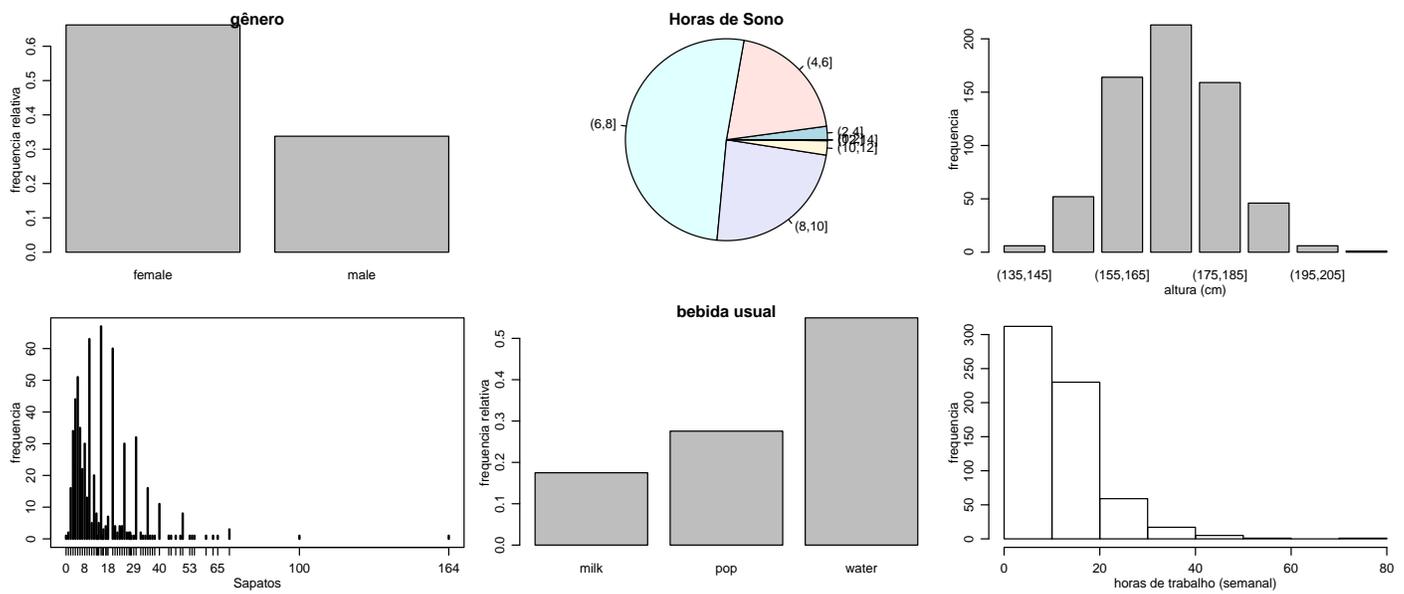


Figura 3: Gráficos do questionário aplicado aos estudantes

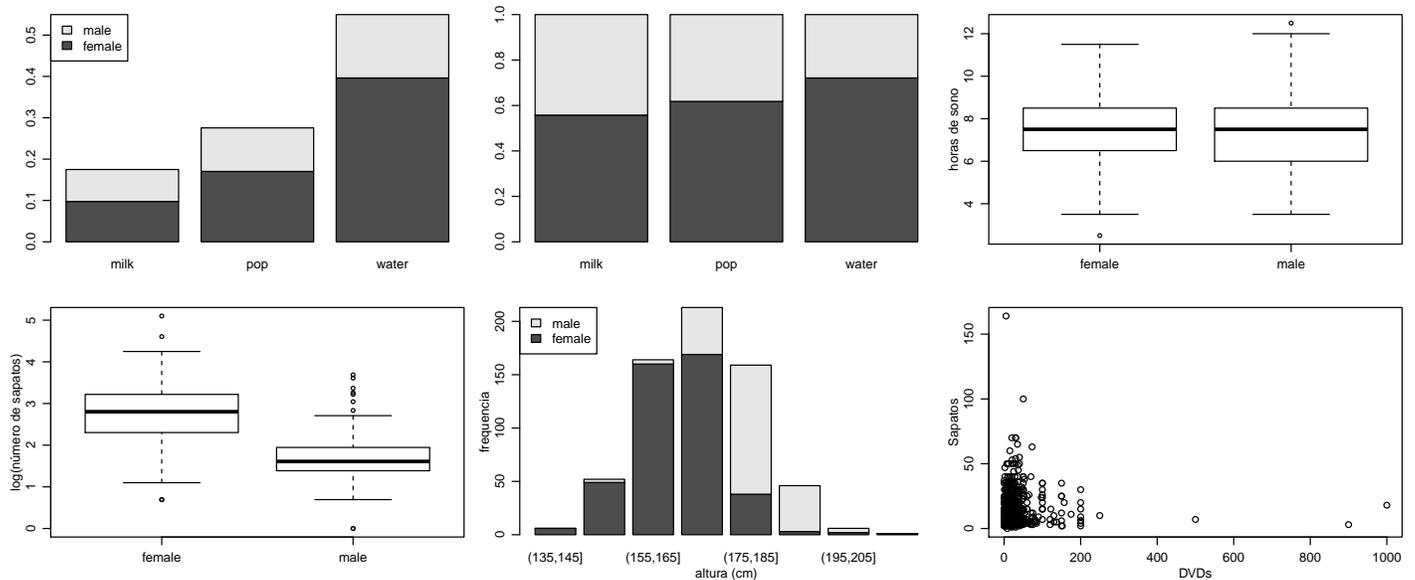


Figura 4: Gráficos do questionário aplicado aos estudantes

1. A média, desvio padrão e coeficiente de variação são medidas comumente para resumir e descrever dados de variáveis quantitativas.
 - (a) Mostre analiticamente o que acontecem com essas medidas caso:
 - i. Uma constante seja somada à todos os dados.
 - ii. Uma constante seja multiplicada à todos os dados.
 - iii. Todos os dados sejam subtraídos da média e o resultado dividido pelo desvio padrão dos dados.
 - (b) O que aconteceria (agora não é preciso demonstrar) com a mediana, quartis e amplitude interquartílica se:
 - i. Uma constante fosse somada à todos os dados.
 - ii. Uma constante fosse multiplicada à todos os dados.