CE-003: Estatística II - Turma O2 - Avaliações Semanais (1^o semestre 2013)

1. Considere que será feita uma pesquisa aplicando-se um questionário aos alunos do BCC/UFPR sobre o curso e as características e opiniões dos alunos.

   (a) Liste possíveis questões deste questionário certificando-se que sejam incluídas ao menos duas de cada tipo de variáveis conforme discutido em aula (qualitativas nominal/ordinal e quantitativas discreta/contínua).

   (b) Imagine agora que o questionário foi aplicado e as respostas tabuladas para análises. Indique/esboce como seria analisada (separadamente) cada uma das variáveis do questionário.

   (c) Indique ao menos três questões de interesse envolvendo duas ou mais variáveis a serem investigadas no questionário e qual análise dos dados permitiria investigar estas questões.

---

2. Foram coletados dados[1] sobre indicadores sociais em 97 países. Os atributos[2] são: *Nat: taxa de natalidade (1.000 hab.)*, *Mort: taxa de mortalidade (1.000 hab.)*, *MI: mortalidade infantil (1.000 hab)*, *ExpM: expectativa de vida para homens*, *ExpF: expectativa de vida para mulheres*, *Renda: renda per capta anula* e *Região: região geográfica* sendo consideradas: ”EUOr”(Europa Oriental),”SA”(América Latina e México),”PM”(”Primeiro Mundo”),”OrMd”(Oriente Médio), ”Asia”e ”Africa”. A renda *per capta* foi também dividida em classes: $[0, 500)$, $[500, 2.000)$, $[2.000, 10.000)$ e $[10.000, 35.000)$. Um cabeçalho do arquivo de dados e um resumo das variáveis são mostrados a seguir.

```
                  Nat Mort   MI ExpM ExpF Renda Regiao    GrupoRenda
Albania          24.7  5.7 30.8 69.6 75.5   600   EUOr   (500,2e+03]
Bulgaria         12.5 11.9 14.4 68.3 74.7  2250   EUOr (2e+03,1e+04]
Czechoslovakia   13.4 11.7 11.3 71.8 77.7  2980   EUOr (2e+03,1e+04]
Former_E._Germany 12.0 12.4  7.6 69.8 75.9    NA   EUOr          <NA>
Hungary          11.6 13.4 14.8 65.4 73.8  2780   EUOr (2e+03,1e+04]
Poland           14.3 10.2 16.0 67.2 75.7  1690   EUOr   (500,2e+03]
```

```
      Nat             Mort             MI               ExpM             ExpF
 Min.   : 9.7   Min.   : 2.2   Min.   :  4.5   Min.   :38.1   Min.   :41.2
 1st Qu.:14.5   1st Qu.: 7.8   1st Qu.: 13.1   1st Qu.:55.8   1st Qu.:57.5
 Median :29.0   Median : 9.5   Median : 43.0   Median :63.7   Median :67.8
 Mean   :29.2   Mean   :10.8   Mean   : 54.9   Mean   :61.5   Mean   :66.2
 3rd Qu.:42.2   3rd Qu.:12.5   3rd Qu.: 83.0   3rd Qu.:68.6   3rd Qu.:75.4
 Max.   :52.2   Max.   :25.0   Max.   :181.6   Max.   :75.9   Max.   :81.8
```

```
     Renda          Regiao            GrupoRenda
 Min.   :   80   EUOr  :11   (0,500]         :24
 1st Qu.:  475   SA    :12   (500,2e+03]     :24
 Median : 1690   PM    :19   (2e+03,1e+04]   :22
 Mean   : 5741   OrMd  :11   (1e+04,3.5e+04]:21
 3rd Qu.: 7325   Asia  :17   NA's           : 6
 Max.   :34064   Africa:27
 NA's   :6
```

A seguir são mostrados alguns gráficos e resumos dos dados. Inicialmente são fornecidos resumos das taxas de natalidade (`NAT`) para cada faixa de renda. A seguir uma tabela relaciona o grupo de renda com a região geográfica. Os gráficos ilustram relacionamentos entre algumas das variáveis. As últimas matrizes são de correlação de Pearson e Spearman respectivamente.

   (a) Faça interpratações estatísticas, no contexto do problema, de cada um dos resultados mostrados.

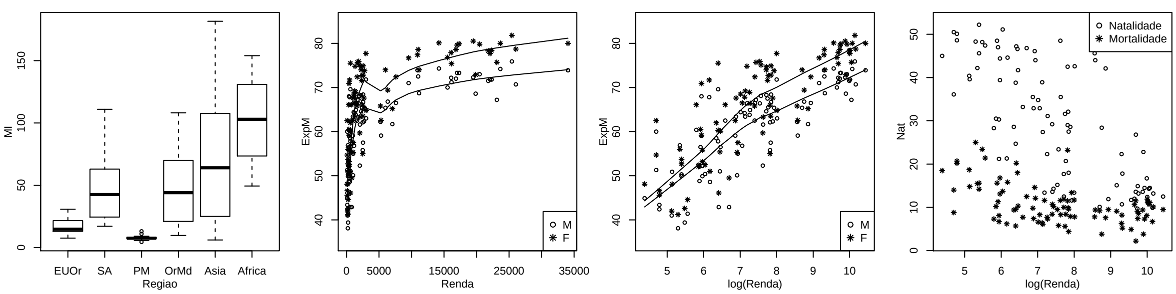
   (b) Comente ainda ao menos mais duas (2) questões de interesse que poderiam ser investigadas e que não foram abordadas nos resultados já mostrados. Indique como seriam utilizados os dados (tipo de análise) para abordar estas questões.

[1] http://www.amstat.org/publications/jse/datasets/poverty.dat.txt
[2] http://www.amstat.org/publications/jse/datasets/poverty.txt

```
$`(0,500]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   21.2    38.6    44.8    41.7    48.3    52.2

$`(500,2e+03]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   13.4    24.4    32.9    31.8    39.6    47.2

$`(2e+03,1e+04]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
   10.1    15.8    28.5    27.7    40.4    48.5

$`(1e+04,3.5e+04]`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
    9.7    12.0    13.6    14.7    14.9    26.8
```

	Regiao					
GrupoRenda	EUOr	SA	PM	OrMd	Asia	Africa
(0,500]	0	1	0	0	8	15
(500,2e+03]	5	6	0	2	3	8
(2e+03,1e+04]	4	5	3	5	1	4
(1e+04,3.5e+04]	0	0	16	3	2	0

```
X-squared
    87.64
```



	Nat	Mort	MI	ExpM	ExpF	Renda
Nat	1.0000	0.4862	0.8584	-0.8665	-0.8944	-0.6291
Mort	0.4862	1.0000	0.6546	-0.7335	-0.6930	-0.3028
MI	0.8584	0.6546	1.0000	-0.9368	-0.9554	-0.6016
ExpM	-0.8665	-0.7335	-0.9368	1.0000	0.9826	0.6430
ExpF	-0.8944	-0.6930	-0.9554	0.9826	1.0000	0.6500
Renda	-0.6291	-0.3028	-0.6016	0.6430	0.6500	1.0000

	Nat	Mort	MI	ExpM	ExpF	Renda
Nat	1.0000	0.4045	0.8861	-0.8823	-0.9018	-0.7342
Mort	0.4045	1.0000	0.4930	-0.5942	-0.5346	-0.4473
MI	0.8861	0.4930	1.0000	-0.9481	-0.9622	-0.8363
ExpM	-0.8823	-0.5942	-0.9481	1.0000	0.9784	0.8240
ExpF	-0.9018	-0.5346	-0.9622	0.9784	1.0000	0.8391
Renda	-0.7342	-0.4473	-0.8363	0.8240	0.8391	1.0000

---

3. (a) Em um levantamento do volume de vendas diário (em unidades de milhares de reais) de um site foram coletados os seguintes valores durante um certo período:

   `2.8 6.8 17.6 0.4 18.1 20.5 67.8 1.0 11.4 2.7 32.3 49.4 24.5 12.2 14.0`

   `3.4 13.4 18.6 2.9 8.6 2.9 46.4 14.1 37.9 9.2 4.2 15.1 4.1 3.8 16.9`

   i. obtenha o teor médio e o desvio padrão,
   ii. obtenha os quantis e a amplitude,
   iii. obtenha o coeficiente de variação,
   iv. obtenha um histograma,

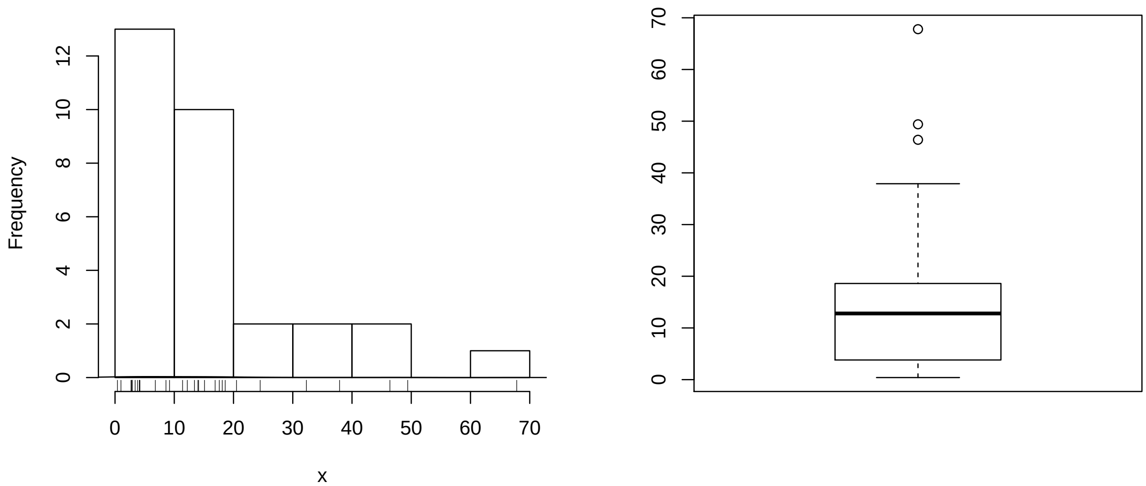


Figura 1: (d) histograma (esquerda) e (e) *box-plot* (direita) dos dados

v. obtenha um box-plot,
vi. obtenha um diagrama de ramo-e-folhas,
vii. comente sobre o padrão da distribuição dos dados e se voce consideraria alguma outra forma de analisá-los.

Solução:

i. $\overline{x} = 16.1$ e $S_x = 16.15$

ii.
```
   Q1        md        Q3 Amplitude
  3.8      12.8      18.6      67.4
```
iii. $C.V. = 100\%$

iv.

v.

vi.
```
> stem(x)
The decimal point is 1 digit(s) to the right of the |

0 | 0133333444799
1 | 1234457889
2 | 15
3 | 28
4 | 69
5 |
6 | 8
```
vii. comentários

(b) Uma cidade recebeu críticas à sua excessiva descarga de esgoto não tratado em um rio. Um microbiologista tomou 45 amostras na água depois da passagem pela planta de tratamento de esgoto e mediu a quantidade de coliformes (bactéria) presente nas amostras.

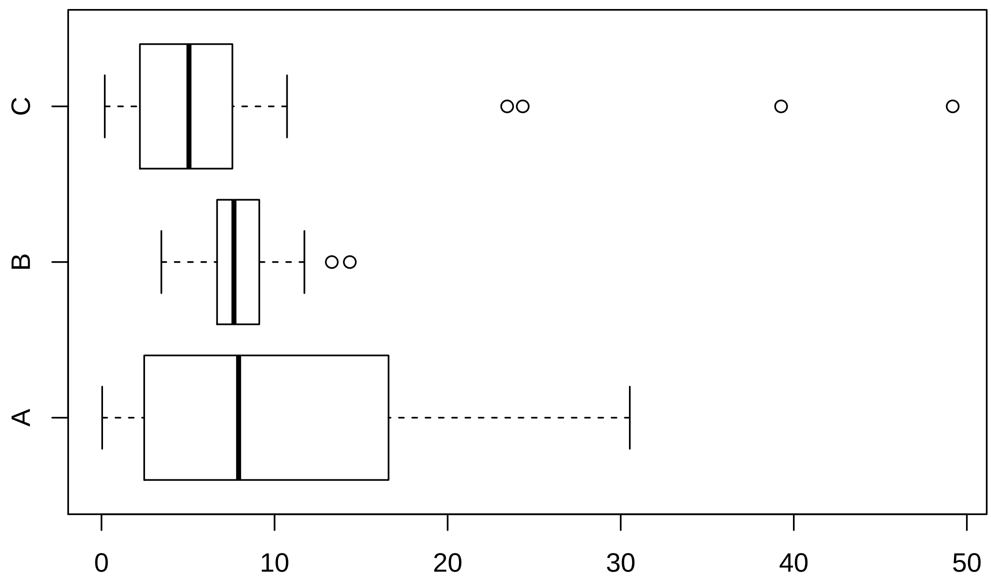
Número de Bactérias	Número de amostras
20-30	5
30-40	20
40-50	15
50-60	5

i. Obtenha a média
ii. Obtenha a mediana

Solução:

i. $\overline{x} = 39.44$
ii. $\mathrm{md}(x) = \frac{10*(22{,}5-5)}{20} = 38.75$

(c) Os tempos de atendimento e solução de problemas foram medidos em três *call-centers* distintos de uma mesma empresa e os dados foram representados no gráfico a seguir. Baseando-se no gráfico, avalie cada uma das afirmações a seguir, dizendo se está certa ou errada, justificando sua resposta e corrigindo as afirmações erradas.



( ) Os valores no local C possuem uma distribuição simétrica.
( ) Os dados discrepantes do local A afetam (aumentam) a mediana do local.
( ) Os locais B e C possuem médias e desvios padrão semelhantes.
( ) O local B possui o menor coeficiente de variação.
( ) As médias dos três locais devem ser semelhantes.

---

4. (a) Três indivíduos tentam, de forma independente, resolver um problema. O primeiro tem 50% de chance de resolver, o segundo tem 65% e o terceiro tem 30%. Qual a probabilidade do problema ser resolvido?

Solução:

$$A: \text{o primeiro resolve o problema} \quad B: \text{o segundo resolve o problema} \quad C: \text{o terceiro resolve o problema}$$

$$P(A) = 0,50 \quad P(B) = 0,65 \quad P(C) = 0,30$$

$$P(A \cup B \cup C) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \stackrel{ind}{=} 1 - P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \cdot P(\overline{C}) = 1 - (1 - 0,50)(1 - 0,65)(1 - 0,70) = 0.878$$

(b) Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma das 5 questões, cada uma com quatro alternativas da qual apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

Solução:

$$A_i: \text{acerta a } i\text{-ésima questão} \quad i = 1, \ldots, 5$$
$$P(A_i) = 0,25 \quad P(\overline{A}_i) = 0,75 \quad \forall i$$
$$P(\text{acertar alguma}) = 1 - P(\text{errar todas}) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4} \cap \overline{A_5}) \stackrel{ind}{=} 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) \cdot P(\overline{A_4}) \cdot P(\overline{A_5}) =$$
$$= 1 - (0,75)^5 = 0.763$$

(c) Dentre seis números inteiros pares e oito ímpares, dois números são escolhidos ao acaso e multiplicados. Qual a probabilidade de que o produto seja par?

Solução:

Evento	$Par \cap Par$	$Par \cap Impar$	$Impar \cap Impar$	$Impar \cap Impar$
Produto	Par	Par	Par	$Impar$
Probabilidade	$\frac{6}{14}\frac{5}{13}$	$\frac{6}{14}\frac{8}{13}$	$\frac{8}{14}\frac{6}{13}$	$\frac{8}{14}\frac{7}{13}$

$$P[ProdutoPar] = 1 - P[ProdutoImpar] = 1 - \frac{8}{14}\frac{7}{13} = 0.692$$

(d) Forneça exemplos que ilustrem situações nas quais probabilidades são avaliadas pelas definições a) clássica, b) frequentista, c) subjetiva.

---

5. (a) Considere o problema a seguir de uma avaliação semanal anterior.
Em um teste múltipla escolha, marca-se uma alternativa em cada uma das cinco questões, cada uma com quatro alternativas, entre as quais apenas uma é correta. Qual a probabilidade de um indivíduo acertar por mero acaso alguma questão?

i. Indique como fica o espaço amostral do experimento (sem necessariamente listar todos os elementos).
ii. Defina a variável aleatória (v.a) adequada ao interesse do problema.
iii. Monte uma tabela com a distribuição de probabilidades desta variável
iv. Caso possível identifique a distribuição de probabilidades desta variável e fornecendo a equação da distribuição.
v. Mostre como obter a probabilidade solicitada a partir do resultado de alguns dos itens anteriores.

Solução:

i. $\Omega = (\overline{AAAAA}), (\overline{AAAA}A), (\overline{AAA}A\overline{A}), \ldots (AAAA\overline{A}), (AAAAA) \quad n(\Omega) = 2^5 = 32$
ii. X : número de acertos
iii.

x	0	1	2	3	4	5
$P[X = x]$	$(0,75)^5$	$\binom{5}{1}(0,25)^1(0,75)^4$	$\binom{5}{2}(0,25)^2(0,75)^3$	$\binom{5}{3}(0,25)^3(0,75)^2$	$\binom{5}{4}(0,25)^4(0,75)^1$	$(0,25)^5$

iv. $X \sim B(n = 5, p = 0,25) \quad P[X = x] = \binom{5}{x}(0,25)^x(1 - 0,25)^{5-x}$
v. $P[X \geq 1] = 1 - P[X = 0] = 1 - \binom{5}{0}(0,25)^0(1 - 0,25)^{5-0} = 0.763$

(b) Identifique a v.a., liste seus possíveis valores e forneça a expressão da função de probabilidades nas situações a seguir.

i. Sabe-se que a proporção de respondentes a um anúncio é de 5%. Vou verificar quantos acessos serão feitos sem obter resposta até que seja obtida a marca de 10 respondentes.
ii. Vou escolher ao acaso 500 habitantes de Curitiba e verificar quantos sabem o nome do vice-prefeito(a) para estimar a proporção dos que conhecem.
iii. Supondo que a proporção da população que possua um determinado tipo de sangue seja de 12%, vou verificar quantos doadores vou receber até conseguir um que tenha o tipo desejado.

Solução:

i.

$$\begin{aligned}
&X: \text{número de acessos não respondentes até obter } 10^o \text{ respondente}\\
&X \sim BN(k = 10, p = 0,05)\\
P[X = x] = &\binom{x+k-1}{x}(0,05)^{10}(0,95)^x
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
&X: \text{número que conhecem entre os 500 entrevistados}\\
&X \sim B(n = 500, p)\\
P[X = x] = &\binom{500}{x}(p)^{10}(1-p)^x
\end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned}
&X: \text{número de doadores que não possuem o sangue desejado, até obter o que possui}\\
&X \sim G(p = 0,12)\\
P[X = x] = &(0,12)(1-0,12)^x
\end{aligned}$$

---

6. Seja uma v.a. contínua com função de distribuição de probabilidades (f.d.p) $f(x) = k(1-x^2)\mathrm{I}_{(0,1]}(x)$, obtenha:

   (a) valor de k para que $f(x)$ seja uma f.d.p. válida,

   (b) a média de X,

   (c) a mediana de X,

   (d) a função de distribuição (acumulada) $F(x)$,

   (e) $P[X > 1/2]$,

   (f) $P[X < 0,75]$,

   (g) o primeiro quartil,

   (h) o terceiro quartil,

   (i) $P[0,25 < X < 0,75]$,

   (j) $P[X < 0,75|X > 0,5]$,

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= 1\\
k[(1-0)\frac{1}{3}(1^3-0^3)] &= 1\\
k &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}[\frac{1}{2}(1^2-0^2) - \frac{1}{4}(1^4-0^4)] = \frac{3}{8} = 0,375$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{Md} f(x)\mathrm{d}x &= 0,5\\
\frac{3}{2}[(Md-0) - \frac{1}{3}(Md^3-0^3)] &= 0,5\\
Md &= 0.347
\end{aligned}$$

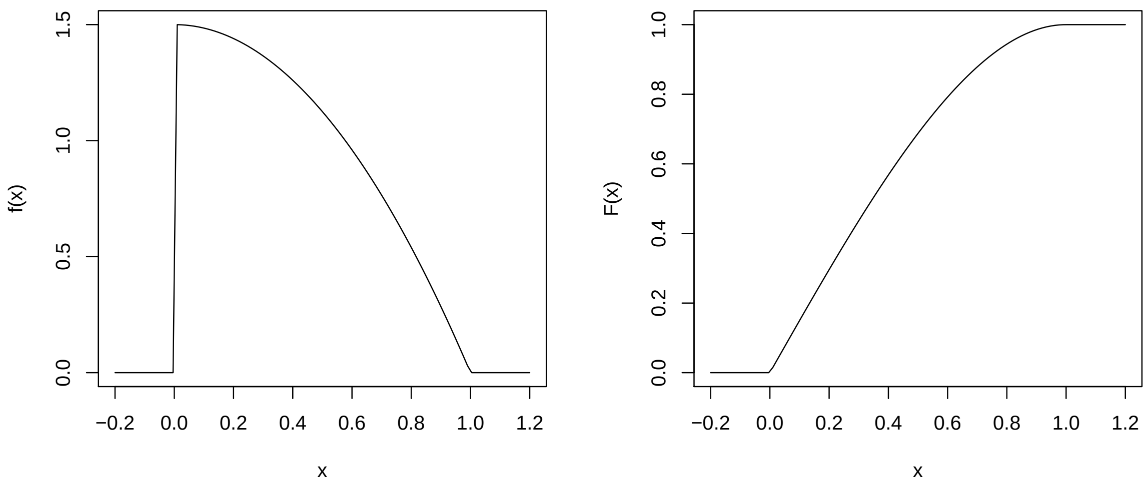


Figura 2: Função de densidade de probabilidade (esquerda) e função de distribuição.

(d) a função de distribuição (acumulada) $F(x)$,

$$F(x) = \int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}[(x-0) - \frac{1}{3}(x^3 - 0^3)] = \frac{1}{2}(3x - x^3)$$

(e)

$$P[X > 1/2] = \int_{1/2}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(1/2) = 0.312$$

(f)

$$P[X < 0,75] = \int_0^{0,75} f(x)\mathrm{d}x = F(0,75) = 0.914$$

(g)

$$\begin{aligned}\int_0^{Q_1} f(x)\mathrm{d}x &= 0,25\\ \frac{3}{2}[(Q_1 - 0) - \frac{1}{3}(Q_1^3 - 0^3)] &= 0,25\\ Q_1 &= 0.168\end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned}\int_0^{Q_3} f(x)\mathrm{d}x &= 0,5\\ \frac{3}{2}[(Q_3 - 0) - \frac{1}{3}(Q_3^3 - 0^3)] &= 0,5\\ Q_3 &= 0.558\end{aligned}$$

(i)

$$P[0,25 < X < 0,75] = \int_{0,25}^{0,75} f(x)\mathrm{d}x = F(0,75) - F(0,25) = 0.547$$

(j)

$$P[X < 0,75|X > 0,5] = \frac{P[0,50 < X < 0,75]}{P[X > 0,50]} = \frac{\int_{0,50}^{0,75} f(x)\mathrm{d}x}{\int_{0,50}^{1} f(x)\mathrm{d}x} = \frac{F(0,75) - F(0,50)}{1 - F(0,50)} = 0.725$$

Resoluções computacionais:

```
> require(MASS)
> ## a)
> kfx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 1, (1-x^2), 0)
> fractions(1/integrate(kfx, 0, 1)$value)
```

```
[1] 3/2
```

```
> fx <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 1, (3/2)*(1-x^2), 0)
> integrate(fx, 0, 1)$value
```

```
[1] 1
```

```
> ## b)
> Ex <- function(x) ifelse(x > 0 & x <= 1, x*fx(x), 0)
> integrate(Ex, 0, 1)$value
```

```
[1] 0.375
```

```
> ## c)
> Qx <- function(x, quantil) (integrate(fx, 0, x)$value - quantil)^2
> (md <- optimize(Qx, c(0,1), quantil=0.5)$min)
```

```
[1] 0.3473
```

```
> ## d)
> Fx <- function(x) ifelse(x>0, ifelse(x<=1, (3*x - x^3)/2,1), 0)
> Fx(1)
```

```
[1] 1
```

```
> ## e)
> 1-Fx(1/2)
```

```
[1] 0.3125
```

```
> ## f)
> Fx(0.75)
```

```
[1] 0.9141
```

```
> ## g)
> (q1 <- optimize(Qx, c(0,1), quantil=0.25)$min)
```

```
[1] 0.1683
```

```
> ## h)
> (q3 <- optimize(Qx, c(0,1), quantil=0.75)$min)
```

```
[1] 0.5579
```

```
> ## i)
> Fx(0.75) - Fx(0.25)
```

```
[1] 0.5469
```

```
> ## j)
> (Fx(0.75) - Fx(0.5))/(1-Fx(0.5))
```

```
[1] 0.725
```

Outra forma para quantis:

```
> require(rootSolve)
> quantil <- function(p){q <- Re(polyroot(c(2*p,-3,0,1)));q[q>0&q<=1]}
> quantil(0.25)
```

```
[1] 0.1683
```

```
> quantil(0.5)
```

```
[1] 0.3473
```

```
> quantil(0.75)
```

```
[1] 0.5579
```

---

7. (a) Um sistema de climatização e refrigeração funciona continuamente e pode ocorrer uma interrupção a qualquer instante do dia com igual probabilidade.

   i. Qual a probabilidade de ocorrer falhas no período da noite, entre $20:00$ e $6:00$?

   ii. Qual a probabilidade de ocorrer falhas nos horários de pico de uso entre $9:00 - 12:00$ ou $14:00 - 17:30$?

   iii. Se houve falha na primeira metade do dia, qual a probabilidade de que tenha sido no horário comercial entre $8:30 - 12:00$?

   iv. Se houve uma falha fora do horário comercial de $9:00 - 18:00$, qual a probabilidade de que tenha sido de madrugada entre $0:00 - 5:00$

   v. Os custos de reparo variam em função do horário do dia. É de R$ 200,00 se a falha é notificada entre $9:00-17:30$, R$ 250,00 se a falha é notificada entre $6:00 - 9:00$ ou $17:30 - 20:00$ e R$350,00 para outros horários do dia. Qual o valor esperado para o pagamento de 100 reparos?

Solução:

$$X : \text{horário da falha/interrupção}$$
$$X \sim U_c[0:00, 24:00]$$
$$f(x) = \frac{1}{24-0} = \frac{1}{24}\mathrm{I}_{[0,24]}(x) \qquad F(x) = \frac{x-0}{24-0} = \frac{x}{24}$$

i. $P[20:00 < X < 24:00] + P[0:00 < X < 6:00] = \frac{4}{24} + \frac{6}{24} = \frac{10}{24} = 0.42$

ii. $P[9:00 < X < 12:00] + P[14:00 < X < 17:30] = \frac{3}{24} + \frac{3,5}{24} = \frac{6,5}{24} = 0.27$

iii. $P[8:30 < X < 12:00 | X < 12:00] = \frac{3,5/24}{12/24} = \frac{3,5}{12} = 0.29$

iv. $P[(0:00 < X < 5:00) | (0:00 < X < 9:00) \cup (18:00 < X < 24:00)] = \frac{5/24}{(9/24)+(6/24)} = \frac{5}{15} = 0.33$

v.
$$Y \sim \text{custo do reparo} \quad y \in \{200, 250, 350\}$$

y	200,00	250,00	350,00
$P[Y=y]$	$P[9:00 < X < 17:30]$	$P[(6:00 < X < 9:00) \cup (17:30 < X < 20:00)]$	$P[(0:00 < X < 6:00) \cup (20:00 < X$
$P[Y=y]$	$\frac{8}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{10}{24}$

$$100 \cdot \mathrm{E}[Y] = 100(200 \cdot \frac{8,5}{24} + 250 \cdot \frac{5,5}{24} + 350 \cdot \frac{10}{24}) = R\$27.395,83$$

(b) Assume-se que o tempo entre conexões a um servidor tem distribuição com média de 2,5 segundos.

   i. Qual a probabilidade de se passarem 10 segundos sem conexão alguma?

   ii. Tendo havido uma conexão, qual a probabilidade de a próxima conexão não ocorrer antes de 1,5 segundos?

   iii. Qual a probabilidade do intervalo entre duas conexões ultrapassar 4 segundos?

   iv. Se já se passaram 2 segundos sem conexão, qual a probabilidade de se passaram mais 4 segundos adicionais sem conexão?

   v. Qual a probabilidade do intervalo entre conexões superar 4 segundos se já se passaram 2,5 segundos sem conexão?

Solução:
Não se especificou a distribuição e vamos assumir a distribuição exponencial considerando: (i) que devem ser valores positivos, (ii) pela possibilidade de cálculos com as informações fornecidas.

$$X : \text{intervalo de tempo entre conexões (segundos)}$$
$$X \sim \mathrm{Exp}(\lambda = 1/2,5 = 2/5)$$
$$f(x) = \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2x/5} \ \ \mathrm{I}_{(0,\infty)}(x) \qquad F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x/5}$$

i. $P[X > 10] = \int_{10}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(10) = 0.018$

ii. $P[X > 1,5] = \int_{1,4}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(1,5) = 0.55$

iii. $P[X > 4] = \int_{4}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1 - F(4) = 0.2$

iv. $P[X > 6|X > 2] = \frac{\int_6^\infty f(x)\mathrm{d}x}{\int_2^\infty f(x)\mathrm{d}x} = {}^3P[X > 4] = 1 - F(4) = 0.2$

v. $P[X > 4|X > 2,5] = \frac{\int_4^\infty f(x)\mathrm{d}x}{\int_{2,5}^\infty f(x)\mathrm{d}x} = {}^3P[X > 1,5] = 1 - F(1,5) = 0.55$

---

8. O tempo para completar uma determinada tarefa de filtragem e classificação de imagens possui distribuição normal de média 20 segundos e desvio padrão de 2 segundos.

   (a) Se um grande número de imagens é processada, qual a proporção esperada de imagens que devem ser processadas em mais de 23 segundos?

   (b) Se 15.000 são processadas, quantas devem levar menos que 16 segundos para serem processadas?

   (c) Se o processamento é interrompido após 25 segundos, quantas dentre as 15.000 não terão o processamento completo?

   (d) Qual o tempo de processamento necessário para classificar 80% das imagens?

   (e) Qual deveria ser o tempo médio de processamento para que 90% das imagens fosse classificada em menos que 20 segundos?

Solução:

$$X : \text{tempo de procesamentos (segundos)}$$
$$X \sim N(\mu = 20, \sigma^2 = 2^2)$$

(a) $P[X > 23] = P[Z > \frac{23-20}{2}] = P[Z > 1.5] = 0,5 - P[0 < Z < 1.5] = 0,5 - 0.4332 = 0.06681$

(b)

$$P[X < 16] = P[Z < \frac{16-20}{2}] = P[Z < -2] = 0,5 - P[0 < Z < -2] = 0,5 - 0.4772 = 0.02275$$
$$\text{Número esperado} : n = 15.000 \cdot 0.02275 = 341$$

(c)

$$P[X > 25] = P[Z > \frac{25-20}{2}] = P[Z > 2.5] = 0,5 - P[0 < Z < 2.5] = 0,5 - 0.4938 = 0.00621$$
$$\text{Número esperado} : n = 15.000 \cdot 0.00621 = 93$$

(d)

$$P[X < x] = 0,80$$
$$P[Z < 0.8416] = 0,80$$
$$z = \frac{x-\mu}{s}$$
$$0.8416 = \frac{x-20}{2}$$
$$x = 21.7$$

(e)

$$P[X < 20] = 0,90$$
$$P[Z < 1.282] = 0,90$$
$$z = \frac{x-\mu}{s}$$
$$1.282 = \frac{20-\mu}{2}$$
$$\mu = 17.44$$

---

[3] propriedade de falta de memória da exponencial

Solução Computacional:

```
> p.a <- pnorm(23, m=20, sd=2, low=F)
> p.b <- pnorm(16, m=20, sd=2); nb <- 15000*p.b
> p.c <- pnorm(25, m=20, sd=2, low=F) ; n.c <- 15000*p.c
> q.d <- qnorm(0.80, m=20, sd=2)
> mu.e  <- 20 - qnorm(0.90) * 2
```

---

9. O tempo para completar uma determinada tarefa de filtragem e classificação de imagens possui distribuição normal de média 20 segundos e desvio padrão de 2 segundos. Uma *cena* é montada com o processamento de oito imagens seguido de mais 40 segundos para composição, junção e conferência das imagens.

   (a) Qual a proporção esperada de *imagens* que devem ser processadas entre 19,5 e 21 segundos?

   (b) Qual a proporção esperada de *cenas* que devem ser processadas entre 195 e 210 segundos?

   (c) Quais os valores simétricos ao redor do tempo médio de processamento de cenas entre os quais se espera que sejam processadas 90% das *imagens*?

   (d) Quais os valores simétricos ao redor do tempo médio de processamento de cenas entre os quais se espera que sejam processadas 90% das *cenas*?

   (e) Uma *cena* foi processada em 205 segundos e desconfia-se que este tempo seja anormal, indicando algum problema no sistema. Calcule a probabilidade de o tempo ser superior a 205 segundos e discuta baseado nos resultados se há evidências para que o tempo seja considerado anormal. se há indicação de que haja problema no sistema.

   (f) No contexto do item anterior, qual seria sua conclusão se o tempo fosse de 215 segundos?

Solução:

X : tempo de procesamento de imagens (segundos) $\quad X \sim N(\mu = 20, \sigma^2 = 2^2 = 4)$

Y : tempo de procesamento de cenas (segundos) $\quad Y = 40 + \sum_{i=1}^{8} \sim N(\mu = 40 + 8 \cdot 20 = 200, \sigma^2 = 8 \cdot 2^2 = 32)$

(a) $P[19,5 < X < 21] = P[\frac{19,5-20}{2} < Z < \frac{21-20}{2}] = P[-0.25 < Z < 0.5] = P[0 < Z < 0.25] + P[0 < Z < 0.5] = 0.2902$

(b) $P[195 < Y < 210] = P[\frac{195-200}{\sqrt{32}} < Z < \frac{210-200}{\sqrt{32}}] = P[-0.8839 < Z < 1.768] = P[0 < Z < 0.8839] + P[0 < Z < 1.768] = 0.7731$

(c)

$$\begin{aligned} P[\mu - \Delta_x < X < \mu + \Delta_x] &= 0,90 \\ z = \frac{\mu + \Delta_x - \mu}{2} &= 1.64 \\ \Delta_x &= 3.29 \\ P[16.7 < X < 23.3] &= 0,90 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} P[\mu - \Delta_y < Y < \mu + \Delta_y] &= 0,90 \\ z = \frac{\mu + \Delta_y - \mu}{\sqrt{32}} &= 1.64 \\ \Delta_y &= 9.3 \\ P[190.7 < X < 209.3] &= 0,90 \end{aligned}$$

(e) $P[Y > 205] = P[Z > \frac{205-200}{\sqrt{32}}] = P[Z > 0.8839] = P[0 < Z < 0.8839] = 0.1884$

(f) $P[Y > 215] = P[Z > \frac{215-200}{\sqrt{32}}] = P[Z > 2.652] = P[0 < Z < 2.652] = 0.004005$

Solução Computacional:

```
> (p1.a <- diff(pnorm(c(19.5,21), m=20, sd=2)))

[1] 0.2902

> (p1.b <- diff(pnorm(c(195,210), m=200, sd=sqrt(32))))

[1] 0.7731

> (q1.c <- qnorm(c(0.05, 0.95), m=20, sd=2)); (z1.c <- qnorm(c(0.05, 0.95)))

[1] 16.71 23.29

[1] -1.645  1.645

> (q1.d <- qnorm(c(0.05, 0.95), m=200, sd=sqrt(32))); (z1.d <- qnorm(c(0.05, 0.95)))

[1] 190.7 209.3

[1] -1.645  1.645

> (p1.e <- pnorm(205, m=200, sd=sqrt(32),low=F))

[1] 0.1884

> (p1.f <- pnorm(215, m=200, sd=sqrt(32),low=F))

[1] 0.004005
```

---

10. Assume-se que em uma rede com um grande número de nós 20% deles podem estar inacessíveis a qualquer tempo. São feitas inspeções periódicas em 400 nós da rede escolhidos ao acaso e se 90 (22,5%) ou mais desses estão inacessíveis, é feito um rastreamento detalhado para verificação e detecção de problemas.

   - Qual a probabilidade de encontrar mais que 85 nós inacessíveis em uma inspeção?
   - Se a rede está normal, qual a probabilidade de encontrar 100 ou mais nós inacessíveis em uma inspeção?
   - Qual os valores de proporções ao redor do valor médio (20%) de nós inacessíveis, dentre os quais devem-se estar 80% das inspeções.
   - Qual a probabilidade de fazer um rastreamento desnecessário?
   - Quantos nós deveriam ser inspecionados para que a chance de fazer um rastreamento desnecessário não ultrapasse 1%?

Solução:

$$X : \text{estado do nó } (0 \text{ - } \text{ acessível}, 1 : \text{ inacessível}) \quad X \sim B(\mu = E[X] = p = 0,20, \sigma^2 = \text{Var}[X] = p(1-p) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16)$$

$$\hat{p} = \overline{X} : \text{proporção de acessíveis entre n (400) nós} \quad \hat{p} = \overline{X} \sim N(\mu_{\hat{p}} = p = 0,20, \sigma^2_{\hat{p}} = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{0,2(1-0,2)}{400} = 0,02)$$

(a) $P[\hat{p} > 85/400] = P[Z > \frac{85/400 - 0,20}{0,02}] = P[Z > 0.625] = 0,5 - P[0 < Z < 0.625] = 0,5 - 0.234 = 0.266$

(b) $P[\hat{p} > 100/400] = P[Z > \frac{100/400 - 0,20}{0,02}] = P[Z > 2.5] = 0,5 - P[0 < Z < 2.5] = 0,5 - 0.4938 = 0.00621$

(c)

$$P[p - \Delta_{\hat{p}} < X < p + \Delta_{\hat{p}}] = 0,80$$
$$z = \frac{p + \Delta_{\hat{p}} - p}{0,02} = 1.28$$
$$\Delta_{\hat{p}} = 0.0256$$
$$P[0.174 < X < 0.226] = 0,80$$

(d) $P[\hat{p} > 0,225] = P[Z > \frac{0,225 - 0,20}{0,02}] = P[Z > 1.25] = 0,5 - P[0 < Z < 1.25] = 0,5 - 0.3944 = 0.1056$

(e)

$$z = 0.99 = \frac{0,225 - 0,20}{0,16/n}$$
$$n = \frac{0.99^2}{(0,225-0,20)^2} 0,16 = 1386$$

Solução Computacional:

```
> sP <- sqrt(.2*.8/400)
> (p2.a <- pnorm(85/400, m=0.20, sd=sP, low=F))

[1] 0.266

> (p2.b <- pnorm(100/400, m=0.20, sd=sP, low=F))

[1] 0.00621

> (q2.c <- qnorm(c(0.10, 0.90), m=0.20, sd=sP))

[1] 0.1744 0.2256

> (p2.d <- pnorm(0.225, m=0.20, sd=sP, low=F))

[1] 0.1056

> (n.e <- ceiling(qnorm(0.99)^2 * (0.2*.8)/0.025^2))

[1] 1386
```

---

11. Em uma avaliação de um novo algoritmo de classificação foi analisada uma amostra de 1200 cenários destre os quais 780 foram classificados corretamente.

   (a) Obtenha a estimativa pontual e intervalar (95% de confiança) para a proporção de classificações corretas.

   (b) Um algoritmo atualmente utilizado possui um percentual de acerto de 62%. Há evidências baseadas no estudo de que o novo algoritmo é superior aos utilizado atualmente? Justifique sua resposta.

Solução:

$$X : \text{resultado da classificação (correto/incorreto)}$$
$$X \sim \mathrm{B}(p) \quad \mathrm{E}[X] = p \quad \mathrm{Var}[X] = p(1-p)$$
$$\hat{p} \sim \mathrm{N}(p, p(1-p)/n)$$

(a)

$$\hat{p} = \frac{780}{1200} = 0.63$$

I.C.assinttico :

$$IC_{95\%} : \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \longrightarrow (0.603 \;\; ; \;\; 0.657)$$

I.C.conservador :

$$IC_{95\%} : \hat{p} \pm z\sqrt{\frac{1}{4n}} \longrightarrow (0.602 \;\; ; \;\; 0.658)$$

(b) Resposta e justificativa baseada no valor estar ou não contido no I.C..

---

12. A fim de estudar e estimar o comportamento de usuários, foram anotados os seguintes tempos (em minutos) de acesso/permanência em um site:

$$23, 527, 626, 725, 423, 430, 029, 127, 123, 422, 328, 625, 326, 524, 825, 4$$

   (a) Obtenha estimativas pontuais da média e desvio padrão dos tempos de acesso.

   (b) Obtenha o intervalo de confiança (90%) do desvio padrão dos tempos de acesso.

   (c) Obtenha o intervalo de confiança (90%) da média dos tempos de acesso.

Solução:

$$X : \text{área basal por parcela} \qquad X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\overline{X} : \text{área basal média} \qquad \overline{X} \sim t_{n-1}(\mu, S^2/n)$$

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 : \text{variância da área basal por parcela} \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(\nu=n-1)}$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{S^2}$$

(a)

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = 25.94$$

$$hat\sigma^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n-1} = 5.21$$
$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{S^2} = 2.28$$

(b) I.C. (90%) para variância

$$IC_{90\%} : \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{sup}} \;\; ; \;\; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{inf}} \right) = \left(\frac{(15-1)5.21}{23.7} \;\; ; \;\; \frac{(15-1)5.21}{6.57} \right) = (3.079 \;\; ; \;\; 11.1)$$

I.C. (90%) desvio padrão:

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{sup}}} \;\; ; \;\; \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{inf}}} \right) = (1.755 \;\; ; \;\; 3.332)$$

(c) I.C. (90%) para média

$$IC_{90\%} : \overline{x} \pm t_{(\nu=n-1,90\%)} \frac{S}{\sqrt{n}}$$
$$IC_{90\%} : 25.9 \pm 1.76 \frac{2.28}{\sqrt{15}}$$
$$IC_{90\%} : (25.7 \;\; ; \;\; 26.2)$$