CE003: Estatística II

1º semestre de 2019

Exercícios da Distribuição Normal

Exercício 01

Suponha que o tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico siga uma distribuição normal de média de 8 minutos e desvio padrão de 2 minutos.

(a) Qual é a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos?

(b)E mais do que 9,5 minutos?

(c)E entre 7 e 10 minutos?

(d)75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos quanto tempo de atendimento?

Exercício 01- resolução

Seja,

X: tempo necessário para atendimento de clientes em uma central de atendimento telefônico

$X \sim N(8, 2^2)$

(a) Qual é a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos?

$$P(X<5)=P\left(Z<\frac{5-8}{2}\right)=P(Z<-1,5)=P(Z>1,5)=1-P(Z\leq 1,5)= \text{1-0,9332 = 0,0668}$$

Portanto, a probabilidade de que um atendimento dure menos de 5 minutos é 6,68%.

(b) E mais do que 9,5 minutos?

$$P(X>9,5)=P\left(Z>\frac{9,5-8}{2}\right)=P(Z>0,75)=1-P(Z\leq 0,75)=1-0,7734=0,2266\ .$$

Portanto, a probabilidade de que um atendimento dure mais do que 9,5 minutos é 22,66%.

(c) E entre 7 e 10 minutos?

$$P(7<X<10)=P\left(\frac{7-8}{2}<Z<\frac{10-8}{2}\right)=P(-0,5<Z<1)=P(Z<1)-P(Z<-0,5)=$$

$$=P(Z<1)-P(Z>0,5)=P(Z<1)-[1-P(Z\leq 0,5)]=0,8413-(1-0,6915)=0,5328$$

Portanto, a probabilidade de que um atendimento dure entre 7 e 10 minutos é 53,28%.

(d)75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos quanto tempo de atendimento?

$$P(X > x) = 0{,}75 \Rightarrow P\left(Z > \frac{x - 8}{2}\right) = 0{,}75$$

x é tal que $A\left(-\frac{(x - 8)}{2}\right) = 0{,}75$.

Então,

$$-\frac{x - 8}{2} = 0{,}67 \Rightarrow x = 8 - 0{,}67 * 2 \cong 6{,}7$$

Portanto, 75% das chamadas telefônicas requerem pelo menos 6,7 minutos de atendimento.

Exercício 02

A distribuição dos pesos de coelhos criados numa granja pode muito bem ser representada por uma distribuição Normal, com média 5 kg e desvio padrão 0,9 kg. Um abatedouro comprará 5000 coelhos e pretende classificá-los de acordo com o peso do seguinte modo: 15% dos mais leves como pequenos, os 50% seguintes como médios, os 20% seguintes como grandes e os 15% mais pesados como extras. Quais os limites de peso para cada classificação?

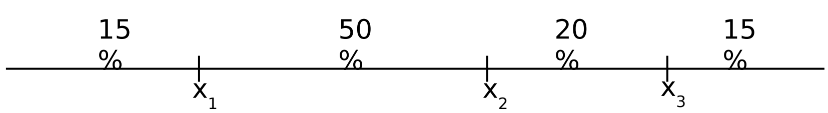
Exercício 02 - resolução

Seja,

X: Peso de coelhos criados em uma granja

X ~ N (5 ; $0{,}9^2$)

Classificação do abatedouro



Seja,

x_1 o valor do peso que separa os 15% mais leves dos demais,

x_2 o valor do peso que separa os 65% mais leves dos demais,

x_3 o valor do peso que separa os 85% mais leves dos demais.

$$P(X < x_1) = 0{,}15 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x_1 - 5}{0{,}9}\right) = 0{,}15 \Rightarrow \frac{x_1 - 5}{0{,}9} = -1{,}04 \Rightarrow p_1 = 5 - 1{,}04 * 0{,}9 \cong 4{,}1 \text{ kg}$$

$$P(X < x_2) = 0{,}65 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x_2 - 5}{0{,}9}\right) = 0{,}65 \Rightarrow \frac{x_2 - 5}{0{,}9} = 0{,}39 \Rightarrow x_2 = 5 + 0{,}39 * 0{,}9 \cong 5{,}4 \text{ kg}$$

$$P(X < x_3) = 0,85 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x_3 - 5}{0,9}\right) = 0,85 \Rightarrow \frac{x_3 - 5}{0,9} = 1,04 \Rightarrow x_3 = 5 + 1,04 * 0,9 \cong 5,9 \text{ kg}$$

Portanto, temos que os limites dos pesos para cada classificação é:

Pequenos são os coelhos que possuem peso inferior a x_1, ou seja, X < 4,1 Kg

Médios são os coelhos que possuem peso entre x_1 e x_2, ou seja, 4,1 Kg < X < 5,4 Kg
Grandes são os coelhos que possuem peso entre x_2 e x_3, ou seja, 5,4 Kg <X < 5,9 Kg
Extras são os coelhos que possuem peso acima de x_3, ou seja, X > 5,9 Kg

Exercício 03
Uma enchedora automática de refrigerantes está regulada para que o volume médio de líquido em cada garrafa seja de 1000 cm^3 e desvio padrão de 10 m^3. Admita que o volume siga uma distribuição normal.

(a) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3?

(b) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido não se desvia da média em mais do que dois desvios padrões?

(c) Se 10 garrafas são selecionadas ao acaso, qual é a probabilidade de que, no máximo, 4 tenham volume de líquido superior a 1002 cm^3?

Exercício 03 - resolução
Seja,
X: volume médio de líquido em cada garrafa.
X~N(1000, 10^2)

(a) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido é menor que 990 cm^3?

$$P(X < 990) = P\left(Z < \frac{990 - 1000}{10}\right) = P(Z < -1) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0,8413 = 0,159$$

Portanto, em 15,9% das garrafas o volume de líquido é menor que 990 $cm^{3.}$

(b) Qual é a porcentagem de garrafas em que o volume de líquido não se desvia da média em mais do que dois desvios padrões?

σ=10 $\rightarrow$ 2σ=20
μ-2σ=1000-20=980 e μ+2σ=1000+20=1020.

$$P(980 < X < 1020) = P\left(\frac{980 - 1000}{10} < Z < \frac{1020 - 1000}{10}\right) = P(-2 < Z < 2) = P(Z < 2) - P(Z < -2) =$$

$$= P(Z < 2) - P(Z > 2) = P(Z \leq 2) - [1 - P(Z \leq 2)] = 2 * P(Z \leq 2) - 1 = 2 * 0,9772 - 1 = 0,9544 \cong 95\%$$

Portanto, em aproximadamente 95% das garrafas, o volume de líquido não se desvia da média em mais que dois desvios padrões.

(c) Se 10 garrafas são selecionadas ao acaso, qual é a probabilidade de que, no máximo, 4 tenham volume de líquido superior a 1002 cm^3?

$$P(X>1002)=P\left(Z>\frac{1002-1000}{10}\right)=P(Z>0{,}2)=1-P(Z\leq 0{,}2)=1-0{,}5793=0{,}4207$$

Considere P(X>1002) = P(sucesso) = p = **0,4207**.

Seja Y o número de garrafas, entre 10 selecionadas ao acaso, com volume de líquido superior a 1002 cm^3.

Y~b(10; 0,4207),

ou seja, a variável aleatória Y tem distribuição binomial com parâmetros *n*=10 e *p*=0,4207.

A função de probabilidade da variável aleatória Y pode ser obtida no R através do comando:

```
> dbinom(0:10,size=10,p=0.4207)
```

Obtem-se a seguinte saída:

Probability Density Function

```
Binomial with n = 10 and p = 0,420700

         x     P( X = x )
         0        0,0043
         1        0,0309
         2        0,1010
         3        0,1956
         4        0,2486
         5        0,2167
         6        0,1311
         7        0,0544
         8        0,0148
         9        0,0024
        10        0,0002
```

Assim, a probabilidade de que no máximo 4 garrafas tenham volume de líquido superior a 1002 cm^3 é dada por:

P(Y ≤ 4) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4)=
= 0,0043 + 0,0309 + 0,1010 + 0,1956 + 0,2486 = **0,5804**.

Assim, a probabilidade de que no máximo 4 garrafas tenham volume de líquido superior a 1002 cm^3 é 58,04%.

Exercício 04

Uma empresa produz televisores de 2 tipos, tipo *A* (comum) e tipo *B* (luxo), e garante a restituição da quantia paga se qualquer televisor apresentar defeito grave no prazo de seis meses. O tempo para ocorrência de algum defeito grave nos televisores tem distribuição normal sendo que, no tipo *A,* com média de 10 meses e desvio padrão de 2 meses e no tipo *B*, com média de 11 meses e desvio padrão de 3 meses. Os televisores de tipo *A* e *B* são produzidos com lucro de 1200 u.m. e 2100 u.m. respectivamente e, caso haja restituição, com prejuízo de 2500 u.m. e 7000 u.m. Respectivamente.

(a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo *A* e do tipo *B*.

(b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo *A* e para os televisores do tipo *B*.

(c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo *A* ou do tipo *B*?

Exercício 04 - resolução

Seja,

X_A: Tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo A

X_B: Tempo de ocorrência de algum defeito grave nos televisores do tipo B

$X_A \sim N(10; 2^2)$	$Lucro_A$: 1200 u.m.	$Prejuízo_A$: 2500 u.m.
$X_B \sim N(11; 3^2)$	$Lucro_B$: 2100 u.m.	$Prejuízo_B$: 7000 u.m.

(a) Calcule as probabilidades de haver restituição nos televisores do tipo *A* e do tipo *B*.

P(restituição de A) = $P(X_A<6)=P(Z<(6-10)/2)=P(Z<-2,0)=\mathbf{0,0228}$

P(restituição de B)=$P(X_B<6)=P(Z<(6-11)/3)=P(Z<-1,67)=\mathbf{0,0475}$

A probabilidade de haver restituição nos televisores do tipo A e do tipo B, respectivamente, são 2,28% e 4,75%.

(b) Calcule o lucro médio para os televisores do tipo *A* e para os televisores do tipo *B*.

P(não restituição de A) = 1 – P(restituição de A) = 1 – 0,0228 = 0,9772

P(não restituição de B) = 1 - P(restituição de B) = 1 - 0,0475 = 0,9525

Lucro médio de A = 1200 x 0,9772 – 2500 x 0,0228 = 1115,64 u.m.

Lucro médio de B = 2100 x 0,9525 – 7000 x 0,0475 = 1667,75 u.m.

(c) Baseando-se nos lucros médios, a empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo *A* ou do tipo *B*?

A empresa deveria incentivar as vendas dos aparelhos do tipo B, pois o lucro médio de B é maior que o lucro médio de A.

Exercício 05
As vendas diárias de um confeitaria no centro de uma cidade têm distribuição normal, com média igual R$ 450,00 por dia e desvio padrão igual a R$ 95,00. Qual é a probabilidade das vendas excederem R$ 700,00 em determinado dia?

Exercício 05 - resolução
Sendo $Z=(700-450)/95=2{,}63$ e utilizando a tabela da Normal padrão, encontramos que $P(Z>2{,}63)=0{,}0043$.

Exercício 06
A média pluviométrica histórica do mês de janeiro em uma cidade é de 86,8 mm. Suponha que uma distribuição Normal seja aplicável e que o desvio padrão seja de 20,30 mm. Em qual porcentagem do tempo a quantidade de chuva deverá ser inferior a 76 mm em janeiro naquela cidade?

Exercício 06 - resolução
Sendo $Z=(76-86,8)/20{,}30=-0,53$ e utilizando a tabela da Normal padrão, encontramos que $P(Z<-0,53)=0{,}2981$.

Em aproximadamente 30% dos dias de janeiro a quantidade de chuva deverá ser inferior a 76 mm.

Exercício 07
A concentração de um poluente em água liberada por uma fábrica tem distribuição N(8; 1,5). Qual a chance, de que num dado dia, a concentração do poluente exceda o limite regulatório de 10 ppm?

Exercício 07 – resolução
Seja X a concentração do poluente na água liberada pela fábrica.
A solução do problema resume-se em determinar a proporção da distribuição que está acima de 10 ppm, isto é, $P(X>10)$. Usando a estatística z temos:
$P(X>10)=P(Z>(10-8)/1{,}5)=P(Z>1{,}33)=1-P(Z\leq 1{,}33)=0{,}09$

Portanto, espera-se que a água liberada pela fábrica exceda os limites regulatórios cerca de 9% do tempo.

Exercício 08

Entre os 4000 empregados de uma empresa, o QI é normalmente distribuído com média de 104 e desvio-padrão de 15. Sabendo que uma tarefa específica requer um QI mínimo de 98 e que aborrece aqueles com QI acima de 110, quantos empregados estarão aptos para executar essa tarefa, com base apenas no QI?

Exercício 08 – resolução

Seja X o QI dos empregados dessa empresa. O problema consiste primeiramente em calcular a seguinte probabilidade:

$$P(98<X<110)=P((98-104)/15<Z<(110-104)/15))=P(-0{,}4<Z<0{,}4)=P(Z<0{,}4)-P(Z<-0.4)=0{,}6554-0{,}3446=0{,}3108$$

E então calcular o número de empregados aptos: 4000x0,3108=1243 empregados