# Paradoxos Clássicos no Cálculo das Probabilidades

Carlos Tenreiro
Universidade de Coimbra

Escola Secundária Drª Maria Cândida, Mira

17 de Novembro de 2004

# Paradoxo

- Opinião contrária à opinião comum ou ao sentir comum;
- Contradição ou contra-senso, pelo menos aparente;
- Coisa que não liga bem com outra;
- Coisa incrível;
- Discordância, discrepância, desarmonia.

# Probabilidade

- A probabilidade é um número entre 0 e 1 (ou entre 0% e 100%).
- Quantifica a maior ou menor possibilidade que um acontecimento tem de ocorrer.
- Quanto maior for a probabilidade de determinado acontecimento, mais possibilidade tem ele de ocorrer.

# Probabilidade

No lançamento de um dado equilibrado, qual é a probabilidade:

- de sair a face 6? $\frac{1}{6}$ = 0.166...
- de sair face com número par? $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ = 0.5
- de não sair a face 6? $\frac{5}{6} = 1 - \frac{1}{6}$ = 0.833...

# Probabilidade

Para resultados igualmente prováveis:

$$\boxed{\text{Probabilidade} = \frac{\text{resultados favoráveis}}{\text{resultados possíveis}}}$$

# Probabilidade

Para resultados igualmente prováveis:

$$\text{Probabilidade} = 1 - \frac{\text{resultados desfavoráveis}}{\text{resultados possíveis}}$$

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face 1 | proporção |
|---|---|---|
| 100 | | |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face 1 | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 23 | 0.23 |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face 1 | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 23 | 0.23 |
| 1000 | 171 | 0.171 |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face 1 | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 23 | 0.23 |
| 1000 | 171 | 0.171 |
| 10000 | 1688 | 0.1688 |
| 50000 | | |

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face 1 | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 23 | 0.23 |
| 1000 | 171 | 0.171 |
| 10000 | 1688 | 0.1688 |
| 50000 | 8266 | 0.16532 |

Probabilidade = 0.1666…

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face par | proporção |
|---|---|---|
| 100 | | |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face par | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 49 | 0.49 |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face par | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 49 | 0.49 |
| 1000 | 510 | 0.510 |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face par | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 49 | 0.49 |
| 1000 | 510 | 0.510 |
| 10000 | 5067 | 0.5067 |
| 50000 | | |

# Probabilidade

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | face par | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 49 | 0.49 |
| 1000 | 510 | 0.510 |
| 10000 | 5067 | 0.5067 |
| 50000 | 25163 | 0.50326 |

Probabilidade = 0.5

# Probabilidade

Repetindo muitas vezes a experiência:

Probabilidade ~ proporção de resultados favoráveis

# Probabilidade

- A igualdade anterior é conhecida como
  "Lei dos grandes números"
  e é devida a
  Jacques Bernoulli
  (1645-1705).

Jacques Bernoulli

# Paradoxo dos dados

Jogando com três dados, 9 e 10 pontos podem ser obtidos de seis maneiras diferentes:

| 9 pontos | 10 pontos |
|---|---|
| 1 2 6 | 1 3 6 |
| 1 3 5 | 1 4 5 |
| 1 4 4 | 2 2 6 |
| 2 2 5 | 2 3 5 |
| 2 3 4 | 2 4 4 |
| 3 3 3 | 3 3 4 |

# Paradoxo dos dados

**Porque não está este facto de acordo com a experiência que revela que a soma 10 ocorre mais vezes que a soma 9?**

# Paradoxo dos dados

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | Soma 9 | Soma 10 |
|---|---|---|
| 100 | | |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 20000 | | |

# Paradoxo dos dados

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | Soma 9 | Soma 10 |
|---|---|---|
| 100 | 12 | 11 |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 20000 | | |

# Paradoxo dos dados

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | Soma 9 | Soma 10 |
|---|---|---|
| 100 | 12 | 11 |
| 1000 | 137 | 124 |
| 10000 | | |
| 20000 | | |

# Paradoxo dos dados

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | Soma 9 | Soma 10 |
|---|---|---|
| 100 | 12 | 11 |
| 1000 | 137 | 124 |
| 10000 | 1183 | 1260 |
| 20000 | | |

# Paradoxo dos dados

- Resultados de vários lançamentos:

| nº lançamentos | Soma 9 | Soma 10 |
|---|---|---|
| 100 | 12 | 11 |
| 1000 | 137 | 124 |
| 10000 | 1183 | 1260 |
| 20000 | 2287 | 2493 |

# Paradoxo dos dados

Este problema foi estudado por gente famosa:

- Cardano (1501-1576)

  "Livro sobre jogos de azar"

  (escrito em 1526, publicado em 1663)

Girolamo Cardano

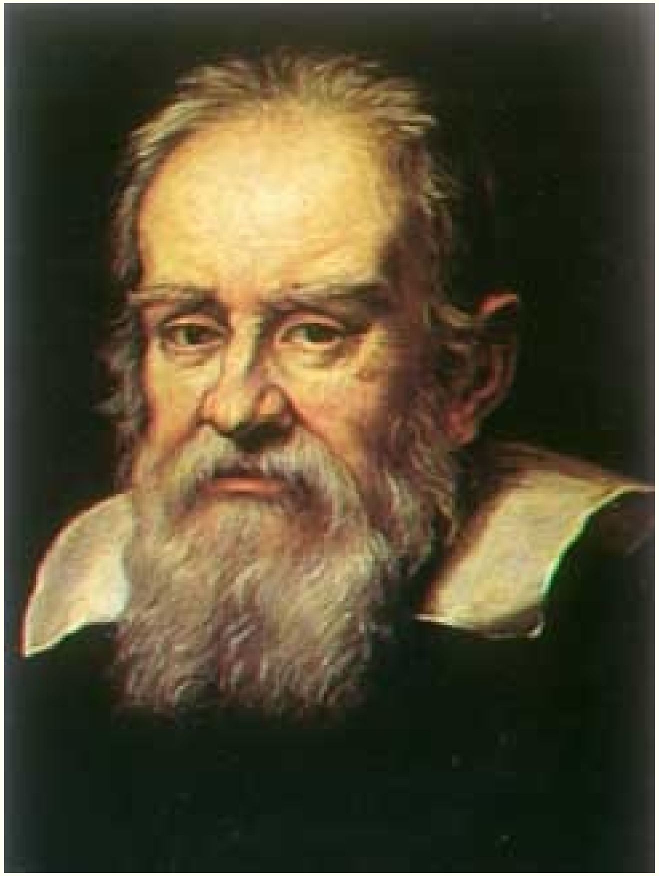
# Paradoxo dos dados

- Galileu Galilei (1564-1642)

  "Considerações sobre o jogo dos dados"

  (escrito entre 1613 e 1623)

Galileu Galilei



# Paradoxo dos dados

- As combinações anteriores não são igualmente prováveis.
- Há 27 maneiras igualmente prováveis de obter 10 pontos.
- Há apenas 25 maneiras igualmente prováveis de obter 9 pontos.

# Paradoxo dos dados

- Resultado 1 2 6

| 1º dado | 2º dado | 3º dado |
| --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 6 |
| 1 | 6 | 2 |
| 2 | 1 | 6 |
| 2 | 6 | 1 |
| 6 | 1 | 2 |
| 6 | 2 | 1 |

# Paradoxo dos dados

- Resultado 1 4 4

| 1º dado | 2º dado | 3º dado |
|---|---|---|
| 1 | 4 | 4 |
| 4 | 1 | 4 |
| 4 | 4 | 1 |

- Resultado 3 3 3

| 1º dado | 2º dado | 3º dado |
|---|---|---|
| 3 | 3 | 3 |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | |
| 1 3 5 | |
| 1 4 4 | |
| 2 2 5 | |
| 2 3 4 | |
| 3 3 3 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | |
| 1 4 4 | |
| 2 2 5 | |
| 2 3 4 | |
| 3 3 3 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | |
| 2 2 5 | |
| 2 3 4 | |
| 3 3 3 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | |
| 2 3 4 | |
| 3 3 3 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | |
| 3 3 3 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| total | 25 |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| total | 25 |

| 10 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 3 6 | |
| 1 4 5 | |
| 2 2 6 | |
| 2 3 5 | |
| 2 4 4 | |
| 3 3 4 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| total | 25 |

| 10 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 3 6 | 6 |
| 1 4 5 | |
| 2 2 6 | |
| 2 3 5 | |
| 2 4 4 | |
| 3 3 4 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| total | 25 |

| 10 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 3 6 | 6 |
| 1 4 5 | 6 |
| 2 2 6 | |
| 2 3 5 | |
| 2 4 4 | |
| 3 3 4 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| total | 25 |

| 10 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 3 6 | 6 |
| 1 4 5 | 6 |
| 2 2 6 | 3 |
| 2 3 5 | |
| 2 4 4 | |
| 3 3 4 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| total | 25 |

| 10 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 3 6 | 6 |
| 1 4 5 | 6 |
| 2 2 6 | 3 |
| 2 3 5 | 6 |
| 2 4 4 | |
| 3 3 4 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| total | 25 |

| 10 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 3 6 | 6 |
| 1 4 5 | 6 |
| 2 2 6 | 3 |
| 2 3 5 | 6 |
| 2 4 4 | 3 |
| 3 3 4 | |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| total | 25 |

| 10 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 3 6 | 6 |
| 1 4 5 | 6 |
| 2 2 6 | 3 |
| 2 3 5 | 6 |
| 2 4 4 | 3 |
| 3 3 4 | 3 |
| | |

# Paradoxo dos dados

| 9 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 2 6 | 6 |
| 1 3 5 | 6 |
| 1 4 4 | 3 |
| 2 2 5 | 3 |
| 2 3 4 | 6 |
| 3 3 3 | 1 |
| total | **25** |

| 10 pontos | Possibili-dades |
|---|---|
| 1 3 6 | 6 |
| 1 4 5 | 6 |
| 2 2 6 | 3 |
| 2 3 5 | 6 |
| 2 4 4 | 3 |
| 3 3 4 | 3 |
| total | **27** |

# O paradoxo da divisão

- Dois jogadores jogam uma série de partidas justas até que um deles obtenha 6 vitórias.
- Por motivos exteriores ao jogo, este é interrompido quando um dos jogadores somava 5 vitórias e o outro 3 vitórias.

# O paradoxo da divisão

Jogador A

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | |

Jogador B

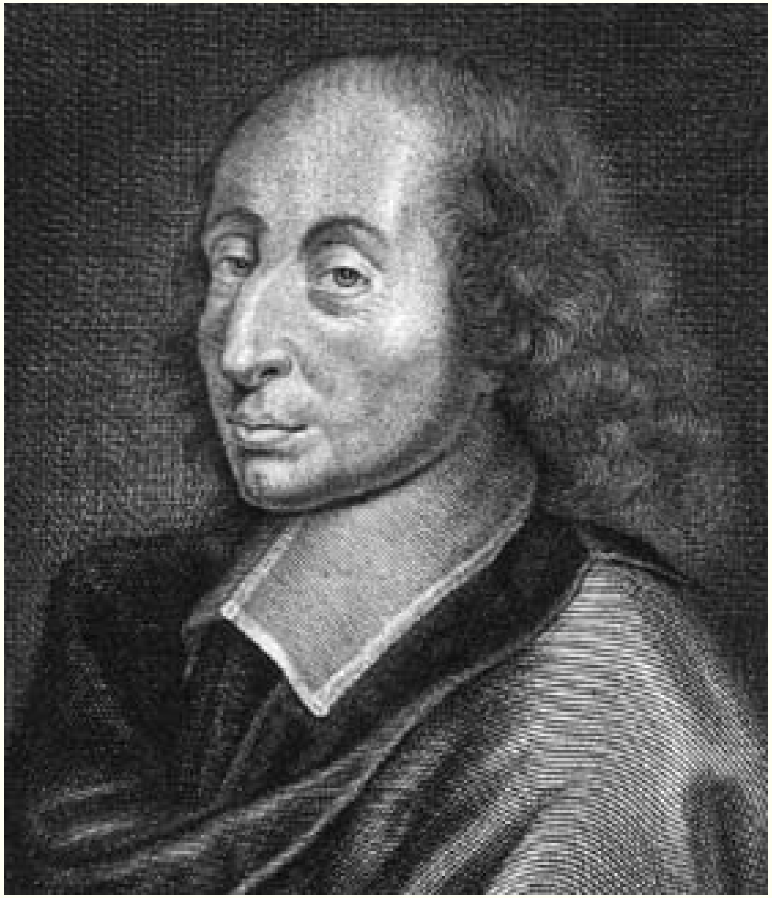
| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | | | |

# O paradoxo da divisão

**Como devemos dividir, de forma justa, o montante apostado por ambos os jogadores?**

# O paradoxo da divisão

Blaise Pascal



- Por volta de 1652, este problema é colocado a Pascal (1623-1662).

# O paradoxo da divisão

- No verão de 1654, ele é o principal motivo duma troca de correspondência entre Pascal e Fermat (1601-1665).

Pierre de Fermat

# O paradoxo da divisão

O problema já tinha sido discutido por vários matemáticos:

- 1494 – Pacioli (1445-1517) propõe:

$$\frac{5}{8} \times \text{Prémio} \leftrightarrow \frac{3}{8} \times \text{Prémio}$$

Luca Pacioli

# O paradoxo da divisão

- 1556 – Tartaglia (1499-1557) diz:

"A solução de Pacioli não parece estar correcta, mas qualquer que seja a forma de dividir o prémio haverá sempre lugar a litígio"

**Nicolo Tartaglia**

# O paradoxo da divisão

- 1564 – Cardano (1501-1576) diz:

"Há um erro evidente na divisão do prémio proposta por Pacioli que até uma criança pode reconhecê-lo"

Girolamo Cardano

# O paradoxo da divisão

- Para os matemáticos anteriores o problema da divisão das apostas é um problema sobre proporções.
- Para Pascal e Fermat o problema reduz-se a um problema de probabilidades.

# O paradoxo da divisão

- Se $p$ é a probabilidade de um dos jogadores ganhar, ele deverá arrecadar

$$p \times \text{Prémio}$$

- Divisão justa:

$$p \times \text{Prémio} \longleftrightarrow (1-p) \times \text{Prémio}$$

# O paradoxo da divisão

Jogador A

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | V |

Jogador B

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | V | |

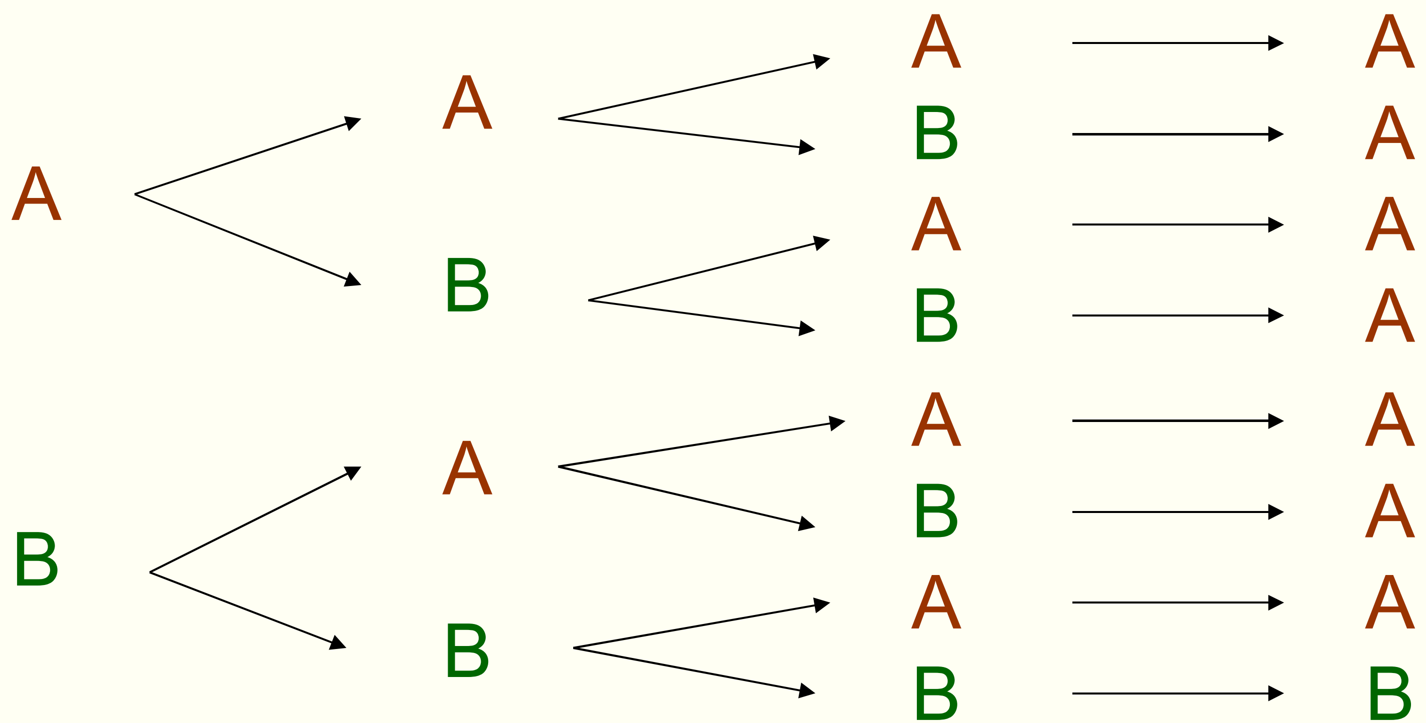
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \boxed{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \times \boxed{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{7}{8}$$

# O paradoxo da divisão

- As soluções apresentadas pelos dois matemáticos são diferentes mas chegam ao mesmo resultado.
- Fermat analisa as possíveis evoluções do jogo mesmo depois do vencedor estar encontrado.

# O paradoxo da divisão

| 1ª partida | 2ª partida | 3ª partida | vencedor |
|---|---|---|---|



# O paradoxo da divisão

Divisão justa:

Jogador A recebe $\longrightarrow$ $\frac{7}{8} \times \text{Prémio}$

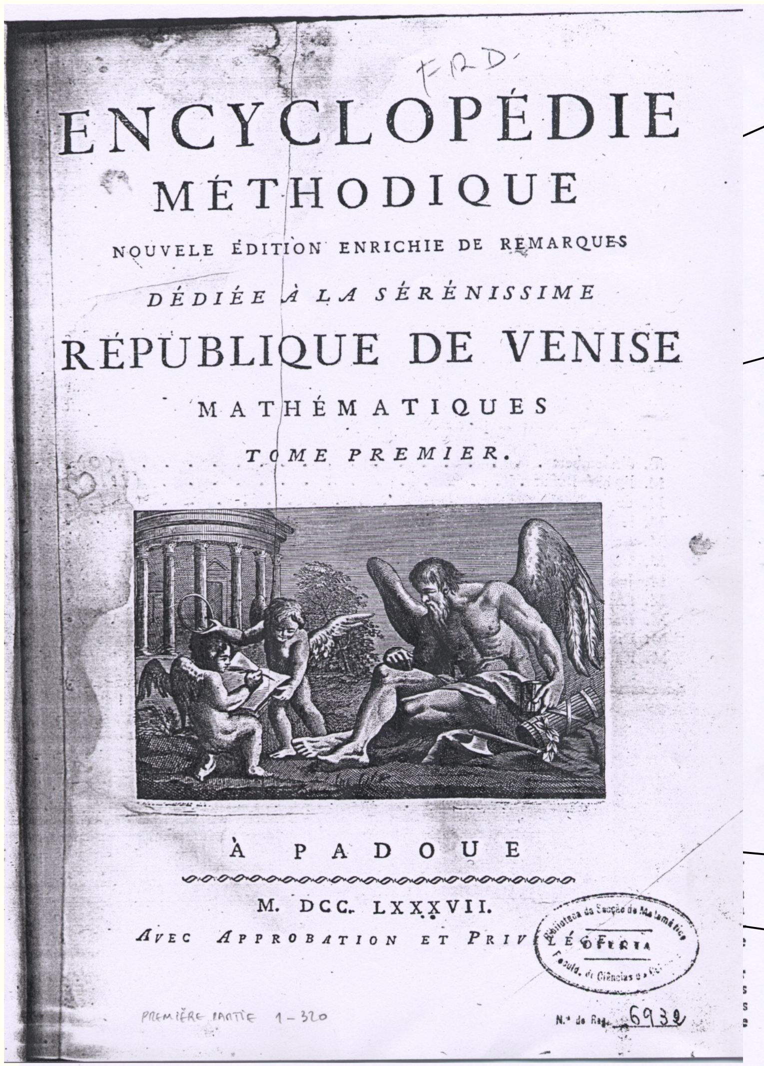
Jogador B recebe $\longrightarrow$ $\frac{1}{8} \times \text{Prémio}$

# Paradoxo de D'Alembert

- Este paradoxo tem origem num artigo publicado por D'Alembert (1717-1783) na "Enciclopédia Francesa" de 1754.

Jean Le Round D'Alembert

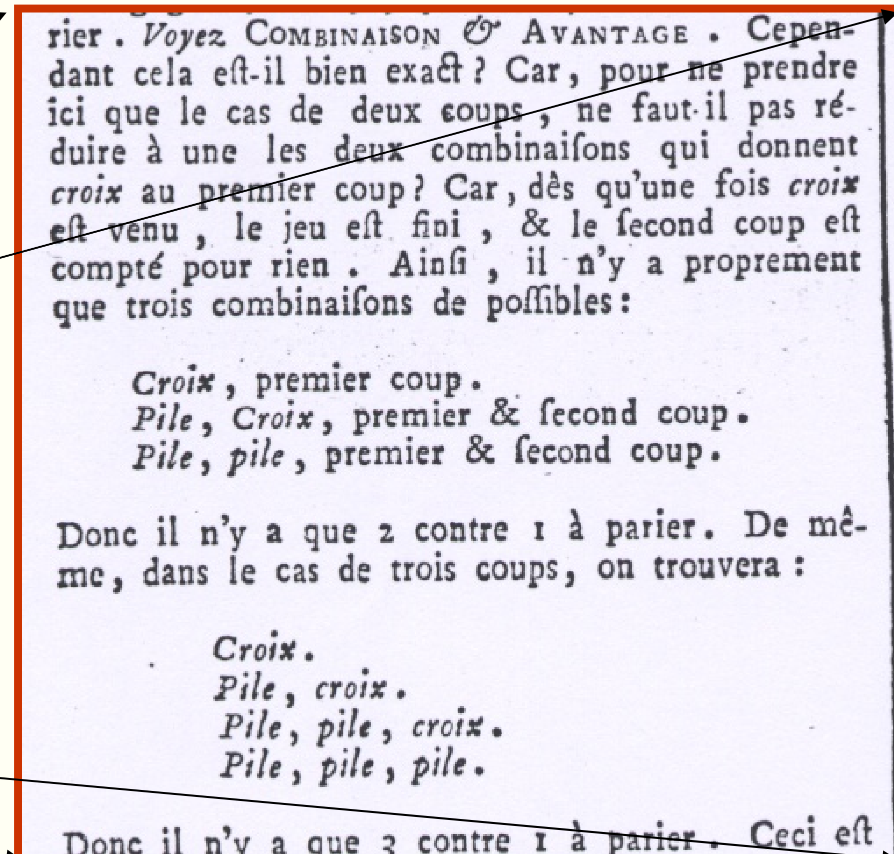
# Paradoxo de D'Alembert



ENCYCLOPÉDIE
MÉTHODIQUE
NOUVELE ÉDITION ENRICHIE DE REMARQUES
DÉDIÉE À LA SÉRÉNISSIME
RÉPUBLIQUE DE VENISE
MATHÉMATIQUES
TOME PREMIER.

À PADOUE
M. DCC. LXXXVII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE.

PREMIÈRE PARTIE 1–320



rier. *Voyez* COMBINAISON & AVANTAGE. Cependant cela eſt-il bien exact? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaiſons qui donnent *croix* au premier coup? Car, dès qu'une fois *croix* eſt venu, le jeu eſt fini, & le ſecond coup eſt compté pour rien. Ainſi, il n'y a proprement que trois combinaiſons de poſſibles:

*Croix*, premier coup.
*Pile*, *Croix*, premier & ſecond coup.
*Pile*, *pile*, premier & ſecond coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même, dans le cas de trois coups, on trouvera:

*Croix*.
*Pile*, *croix*.
*Pile*, *pile*, *croix*.
*Pile*, *pile*, *pile*.

Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier. Ceci eſt

# Paradoxo de D'Alembert

**Qual é a probabilidade de obter pelo menos uma cara em dois lançamentos duma moeda?**

**Resposta de D'Alembert:**

$$\frac{2}{3} = 0.666\ldots$$

# Paradoxo de D'Alembert

| 1º lançamento | 2º lançamento | 1 ou 2 caras |
|---|---|---|
| cara | | sim |
| coroa | cara | sim |
| | coroa | não |

# Paradoxo de D'Alembert

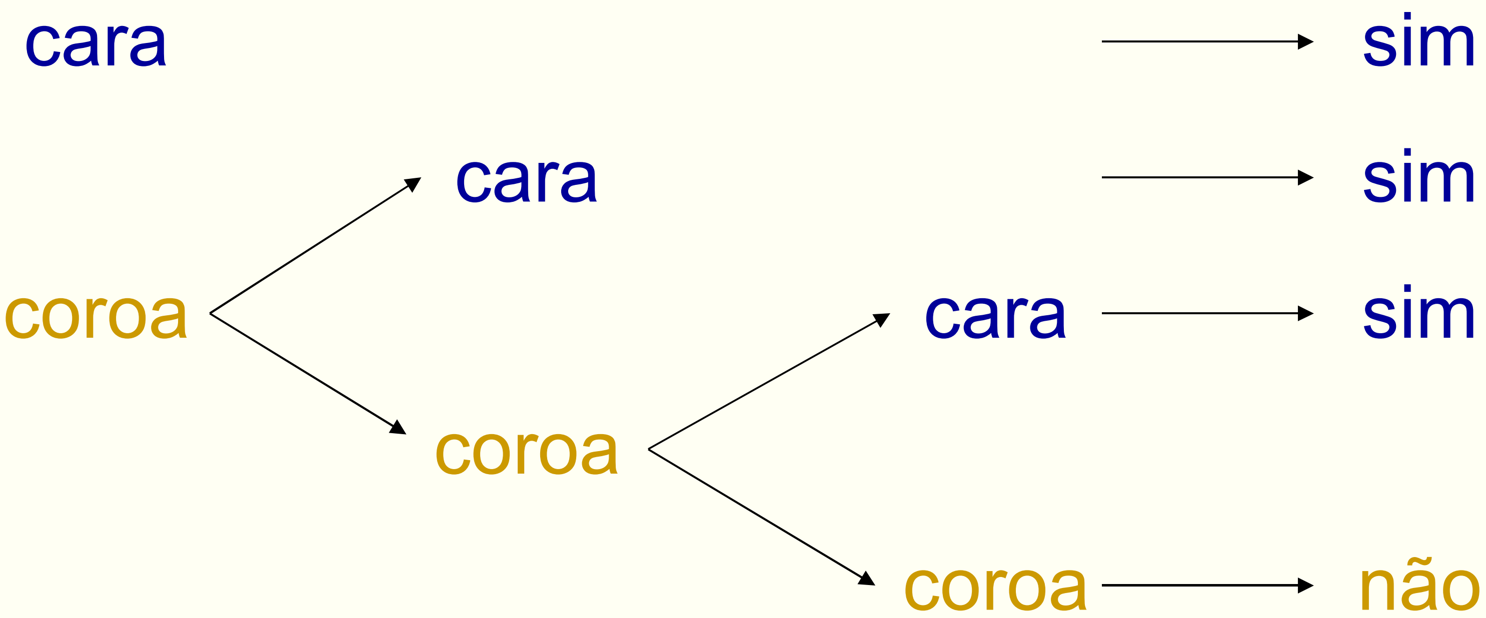
**Qual é a probabilidade de obter pelo menos uma cara em três lançamentos duma moeda?**

**Resposta de D'Alembert:**

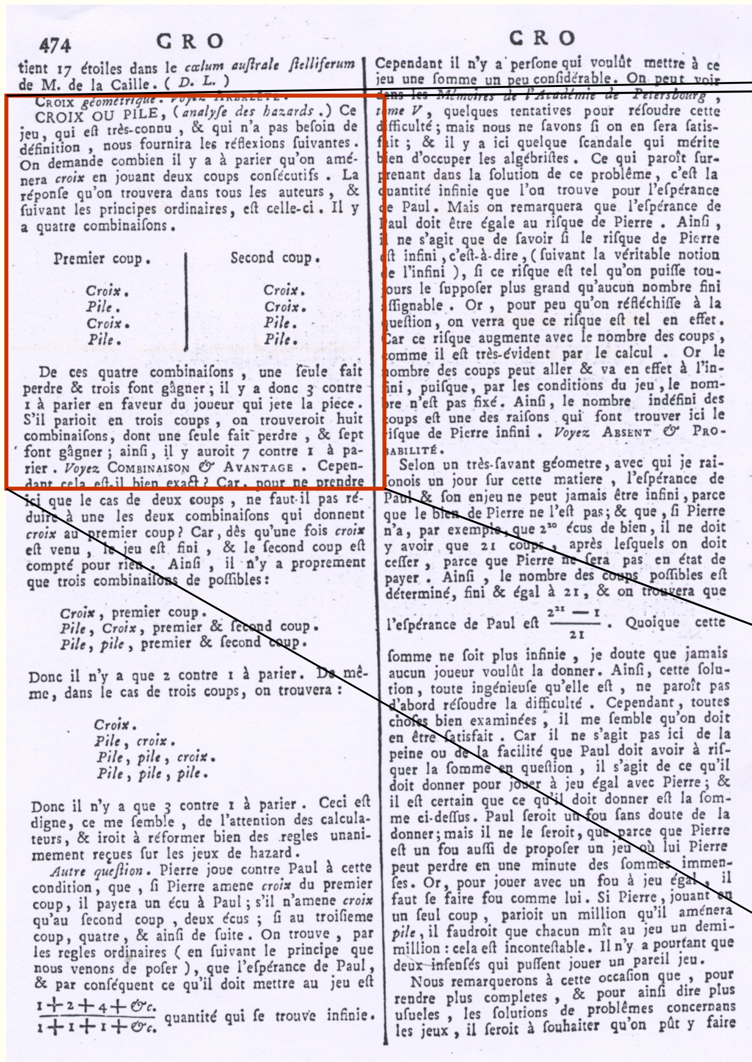
$$\frac{3}{4} = 0.75$$

# Paradoxo de D'Alembert

| 1º lançamento | 2º lançamento | 3º lançamento | 1,2 ou 3 caras |
|---|---|---|---|



# Paradoxo de D'Alembert





tient 17 étoiles dans le *cœlum auſtrale ſtelliferum* de M. de la Caille. ( *D. L.* )

CROIX *géometrique*. *Voyez* ARBALÊTE.

CROIX OU PILE, (*analyſe des hazards*.) Ce jeu, qui eſt très-connu, & qui n'a pas beſoin de définition, nous fournira les réflexions ſuivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amé-nera *croix* en jouant deux coups conſécutifs. La réponſe qu'on trouvera dans tous les auteurs, & ſuivant les principes ordinaires, eſt celle-ci. Il y a quatre combinaiſons.

| Premier coup. | Second coup. |
|---|---|
| *Croix*. | *Croix*. |
| *Pile*. | *Croix*. |
| *Croix*. | *Pile*. |
| *Pile*. | *Pile*. |

De ces quatre combinaiſons, une ſeule fait perdre & trois font gâgner; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jete la piece. S'il parioit en trois coups, on trouveroit huit combinaiſons, dont une ſeule fait perdre, & ſept font gâgner; ainſi, il y auroit 7 contre 1 à parier. *Voyez* COMBINAISON & AVANTAGE. Cependant cela eſt-il bien exact? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaiſons qui donnent *croix* au premier coup? Car, dès qu'une fois *croix* eſt venu, le jeu eſt fini, & le ſecond coup eſt compté pour rien. Ainſi, il n'y a proprement que trois combinaiſons de poſſibles:

*Croix*, premier coup.
*Pile*, *Croix*, premier & ſecond coup.
*Pile*, *pile*, premier & ſecond coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier. De même, dans le cas de trois coups, on trouvera:

*Croix*.
*Pile*, *croix*.
*Pile*, *pile*, *croix*.
*Pile*, *pile*, *pile*.

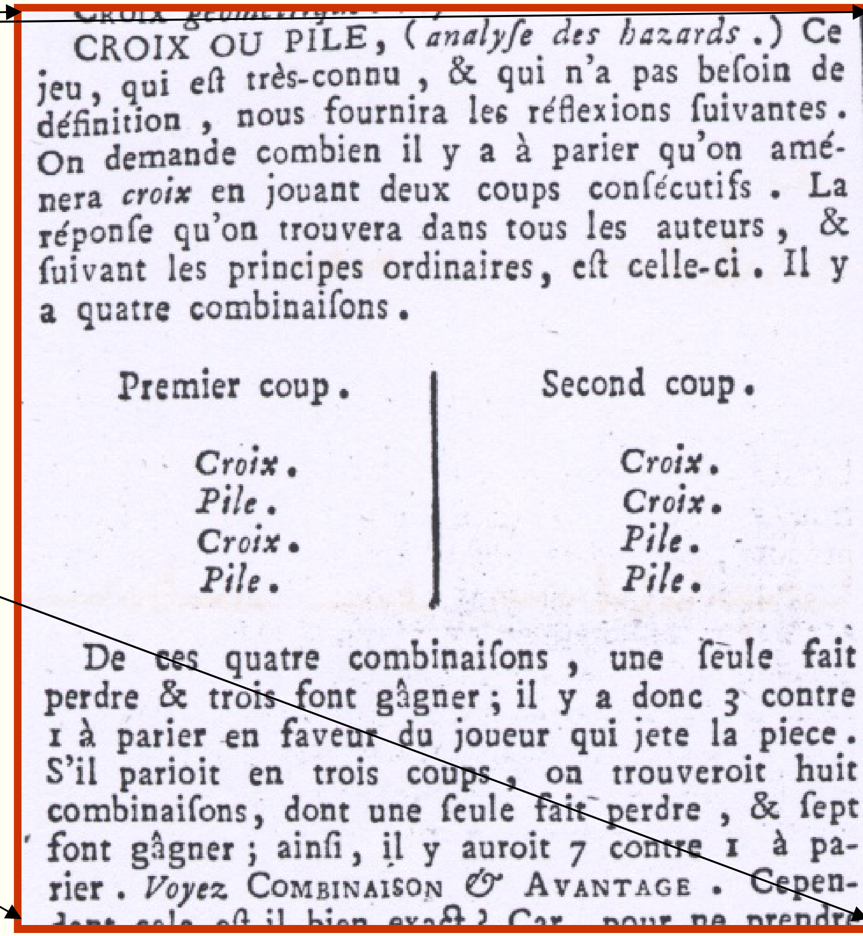
Donc il n'y a que 3 contre 1 à parier. Ceci eſt digne, ce me ſemble, de l'attention des calculateurs, & iroit à réformer bien des regles unanimement reçues ſur les jeux de hazard.

*Autre queſtion*. Pierre joue contre Paul à cette condition, que, ſi Pierre amene *croix* du premier coup, il payera un écu à Paul; s'il n'amene *croix* qu'au ſecond coup, deux écus; ſi au troiſieme coup, quatre, & ainſi de ſuite. On trouve, par les regles ordinaires (en ſuivant le principe que nous venons de poſer), que l'eſpérance de Paul, & par conſéquent ce qu'il doit mettre au jeu eſt $\frac{1+2+4+\&c.}{1+1+1+\&c.}$ quantité qui ſe trouve infinie.

Cependant il n'y a perſone qui voulût mettre à ce jeu une ſomme un peu conſidérable. On peut voir dans les *Mémoires de l'Académie de Petersbourg*, *tome V*, quelques tentatives pour réſoudre cette difficulté; mais nous ne ſavons ſi on en ſera ſatisfait; & il y a ici quelque ſcandale qui mérite bien d'occuper les algébriſtes. Ce qui paroît ſurprenant dans la ſolution de ce problême, c'eſt la quantité infinie que l'on trouve pour l'eſpérance de Paul. Mais on remarquera que l'eſpérance de Paul doit être égale au riſque de Pierre. Ainſi, il ne s'agit que de ſavoir ſi le riſque de Pierre eſt infini, c'eſt-à-dire, (ſuivant la véritable notion de l'infini), ſi ce riſque eſt tel qu'on puiſſe toujours le ſuppoſer plus grand qu'aucun nombre fini aſſignable. Or, pour peu qu'on réfléchiſſe à la queſtion, on verra que ce riſque eſt tel en effet. Car ce riſque augmente avec le nombre des coups, comme il eſt très-évident par le calcul. Or le nombre des coups peut aller & va en effet à l'infini, puiſque, par les conditions du jeu, le nombre n'eſt pas fixé. Ainſi, le nombre indéfini des coups eſt une des raiſons qui font trouver ici le riſque de Pierre infini. *Voyez* ABSENT & PROBABILITÉ.

Selon un très-ſavant géometre, avec qui je raiſonois un jour ſur cette matiere, l'eſpérance de Paul & ſon enjeu ne peut jamais être infini, parce que le bien de Pierre ne l'eſt pas; & que, ſi Pierre n'a, par exemple, que $2^{20}$ écus de bien, il ne doit y avoir que 21 coups, après leſquels on doit ceſſer, parce que Pierre ne ſera pas en état de payer. Ainſi, le nombre des coups poſſibles eſt déterminé, fini & égal à 21, & on trouvera que l'eſpérance de Paul eſt $\frac{2^{21}-1}{21}$. Quoique cette ſomme ne ſoit plus infinie, je doute que jamais aucun joueur voulût la donner. Ainſi, cette ſolution, toute ingénieuſe qu'elle eſt, ne paroît pas d'abord réſoudre la difficulté. Cependant, toutes choſes bien examinées, il me ſemble qu'on doit en être ſatisfait. Car il ne s'agit pas ici de la peine ou de la facilité que Paul doit avoir à riſquer la ſomme en queſtion, il s'agit de ce qu'il doit donner pour jouer à jeu égal avec Pierre; & il eſt certain que ce qu'il doit donner eſt la ſomme ci-deſſus. Paul ſeroit un fou ſans doute de la donner; mais il ne le feroit, que parce que Pierre eſt un fou auſſi de propoſer un jeu où lui Pierre peut perdre en une minute des ſommes immenſes. Or, pour jouer avec un fou à jeu égal, il faut ſe faire fou comme lui. Si Pierre, jouant en un ſeul coup, parioit un million qu'il aménera *pile*, il faudroit que chacun mît au jeu un demi-million: cela eſt inconteſtable. Il n'y a pourtant que deux inſenſés qui puſſent jouer un pareil jeu.

Nous remarquerons à cette occaſion que, pour rendre plus completes, & pour ainſi dire plus uſueles, les ſolutions de problêmes concernans les jeux, il ſeroit à ſouhaiter qu'on pût y faire



CROIX OU PILE, (*analyſe des hazards*.) Ce jeu, qui eſt très-connu, & qui n'a pas beſoin de définition, nous fournira les réflexions ſuivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amé-nera *croix* en jouant deux coups conſécutifs. La réponſe qu'on trouvera dans tous les auteurs, & ſuivant les principes ordinaires, eſt celle-ci. Il y a quatre combinaiſons.

Premier coup. *Croix*. *Pile*. *Croix*. *Pile*.
Second coup. *Croix*. *Croix*. *Pile*. *Pile*.

De ces quatre combinaiſons, une ſeule fait perdre & trois font gâgner; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jete la piece. S'il parioit en trois coups, on trouveroit huit combinaiſons, dont une ſeule fait perdre, & ſept font gâgner; ainſi, il y auroit 7 contre 1 à parier. *Voyez* COMBINAISON & AVANTAGE. Cepen-

# Paradoxo de D’Alembert

- E D’Alembert termina:

**“Isto parece-me digno de merecer a atenção dos calculadores que irão reformular as regras por todos aceites sobre os jogos de azar”**

Estarão as respostas de D’Alembert correctas?

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 2 lançamentos:

| nº repetições | 1 ou 2 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | | |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 2 lançamentos:

| nº repetições | 1 ou 2 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 69 | 0.69 |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 2 lançamentos:

| nº repetições | 1 ou 2 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 69 | 0.69 |
| 1000 | 778 | 0.778 |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Paradoxo de D’Alembert

- Resultados de várias repetições de 2 lançamentos:

| nº repetições | 1 ou 2 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 69 | 0.69 |
| 1000 | 778 | 0.778 |
| 10000 | 7545 | 0.7545 |
| 50000 | | |

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 2 lançamentos:

| nº repetições | 1 ou 2 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 69 | 0.69 |
| 1000 | 778 | 0.778 |
| 10000 | 7545 | 0.7545 |
| 50000 | 37337 | 0.74674 |

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 2 lançamentos:

| nº repetições | 1 ou 2 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 69 | 0.69 |
| 1000 | 778 | 0.778 |
| 10000 | 7545 | 0.7545 |
| 50000 | 37337 | 0.74674 |

Resposta de D'Alembert : 0.666…

?

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 3 lançamentos:

| nº repetições | 1, 2 ou 3 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | | |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 3 lançamentos:

| nº repetições | 1, 2 ou 3 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 92 | 0.92 |
| 1000 | | |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 3 lançamentos:

| nº repetições | 1, 2 ou 3 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 92 | 0.92 |
| 1000 | 882 | 0.882 |
| 10000 | | |
| 50000 | | |

# Paradoxo de D’Alembert

- Resultados de várias repetições de 3 lançamentos:

| nº repetições | 1, 2 ou 3 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 92 | 0.92 |
| 1000 | 882 | 0.882 |
| 10000 | 8762 | 0.8762 |
| 50000 | | |

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 3 lançamentos:

| nº repetições | 1, 2 ou 3 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 92 | 0.92 |
| 1000 | 882 | 0.882 |
| 10000 | 8762 | 0.8762 |
| 50000 | 43814 | 0.87628 |

# Paradoxo de D'Alembert

- Resultados de várias repetições de 3 lançamentos:

| nº repetições | 1, 2 ou 3 caras | proporção |
|---|---|---|
| 100 | 92 | 0.92 |
| 1000 | 882 | 0.882 |
| 10000 | 8762 | 0.8762 |
| 50000 | 43814 | 0.87628 |

Resposta de D'Alembert : 0.75

?

# Paradoxo de D'Alembert

- As respostas de D'Alembert não estão correctas.
- As combinações por ele descritas não são igualmente prováveis.
- D'Alembert devia ter usado o método que Fermat utilizou 100 anos antes.

# Paradoxo de D'Alembert

| 1º lançamento | 2º lançamento | 1 ou 2 caras |
|---|---|---|
| cara | cara | sim |
| | coroa | sim |
| coroa | cara | sim |
| | coroa | não |

# Paradoxo de D'Alembert

Resposta correcta para

2 lançamentos:

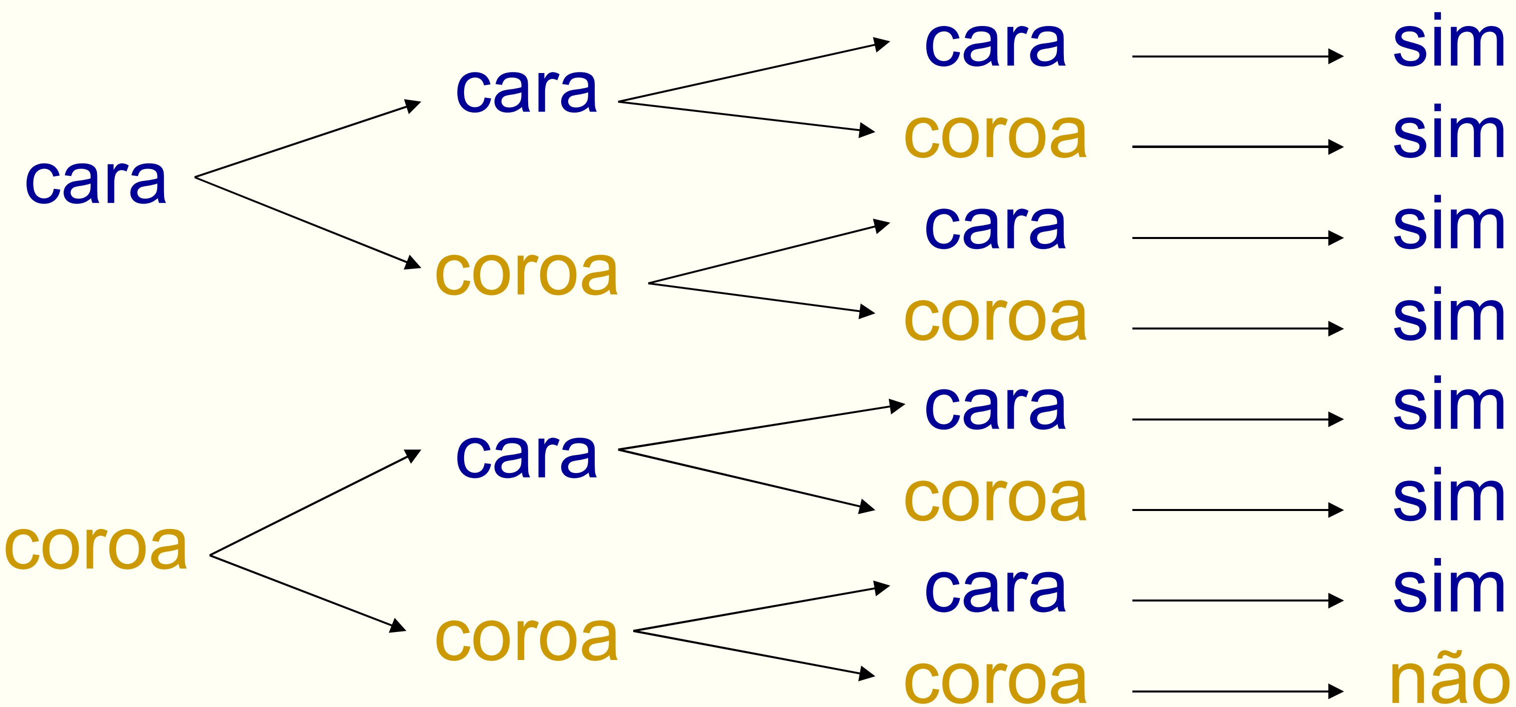
$$\frac{3}{4} = \mathbf{0.75}$$

Resultado de 50000 repetições:

**0.74674**

# Paradoxo de D'Alembert

| 1º lançamento | 2º lançamento | 3º lançamento | 1,2 ou 3 caras |
|---|---|---|---|



# Paradoxo de D'Alembert

Resposta correcta para

3 lançamentos:

$$\frac{7}{8} = \boxed{0.875}$$

Resultado de 50000 repetições:

**0.87628**

# Paradoxo do dia de aniversário

- Se não mais que 365 pessoas estiverem reunidas, é possível que todas tenham um dia de aniversário diferente.

- Com 366 pessoas é certo que pelo menos duas delas têm o mesmo dia de aniversário.

# Paradoxo do dia de aniversário

**Se 57 pessoas estiverem reunidas, qual é a probabilidade de pelo menos duas terem o mesmo dia de aniversário?**

Com certeza deve ser pequena ...

# Paradoxo do dia de aniversário

Para resultados igualmente prováveis:

$$\text{Probabilidade} = \frac{\text{resultados favoráveis}}{\text{resultados possíveis}}$$

# Paradoxo do dia de aniversário

resultados possíveis

2 pessoas

| | |
|---|---|
| 1 | 1,2,3,...,365 |
| 2 | 1,2,3,...,365 |
| 3 | 1,2,3,...,365 |
| ... | ... |
| 365 | 1,2,3,...,365 |

365 x 365 resultados possíveis

# Paradoxo do dia de aniversário

**resultados favoráveis**

2 pessoas

| | |
|---|---|
| 1 | 1 |
| 2 | 2 |
| 3 | 3 |
| ... | ... |
| 365 | 365 |

$\boxed{\text{365 resultados favoráveis}}$

# Paradoxo do dia de aniversário

- Para 2 pessoas a probabilidade pedida é igual a

$$\frac{365}{365 \times 365} = \mathbf{0.0027}$$

Em 0.27% das reuniões com 2 pessoas, essas duas pessoas têm o mesmo dia de aniversário

# Paradoxo do dia de aniversário

Para resultados igualmente prováveis:

$$\text{Probabilidade} = 1 - \frac{\text{resultados desfavoráveis}}{\text{resultados possíveis}}$$

# Paradoxo do dia de aniversário

**resultados desfavoráveis**

2 pessoas

| | |
|---|---|
| 1 | 2,3,…,365 |
| 2 | 1,3,…,365 |
| 3 | 1,2,…,365 |
| … | … |
| 365 | 1,2,…,364 |

→ $\boxed{\text{365 x 364 resultados desfavoráveis}}$

# Paradoxo do dia de aniversário

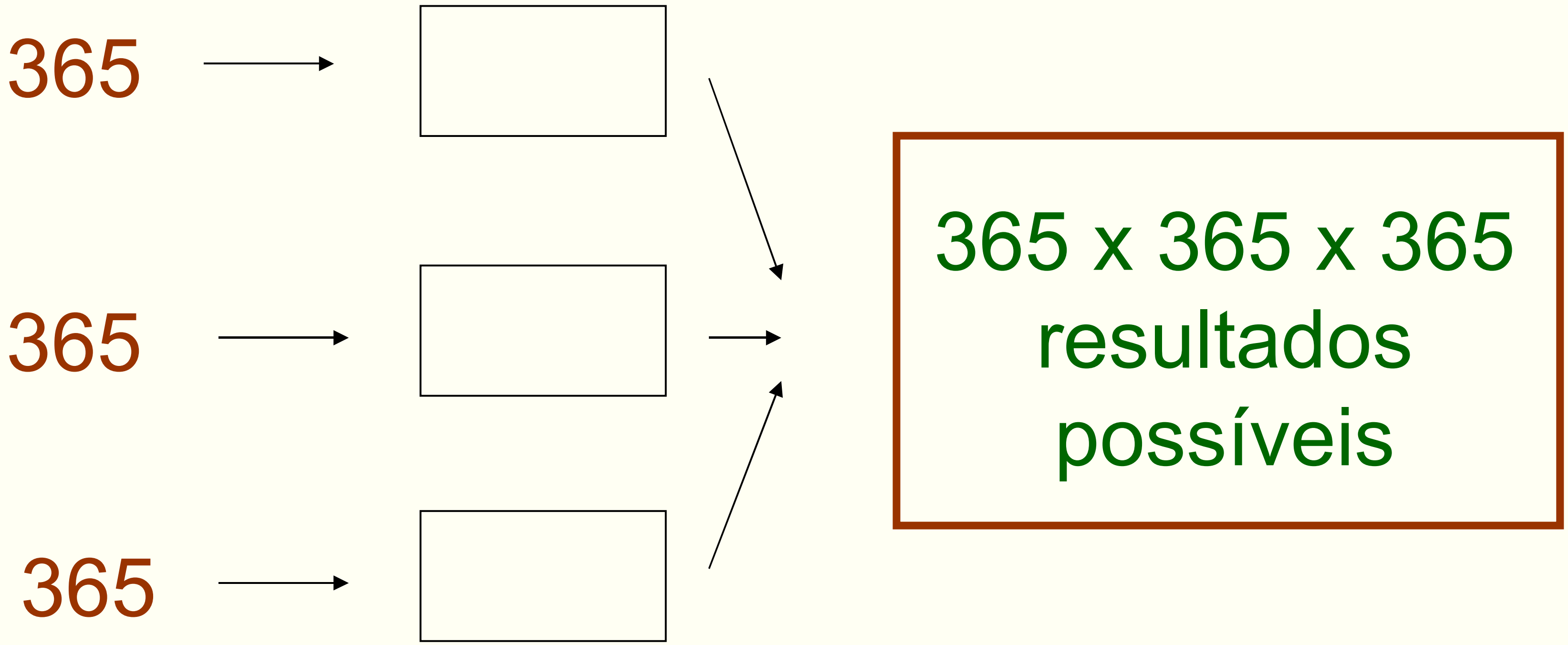
- Para 2 pessoas a probabilidade pedida é igual a

$$1-\frac{365\times 364}{365\times 365} = \mathbf{0.0027}$$

# Paradoxo do dia de aniversário

3 pessoas

**resultados possíveis**



# Paradoxo do dia de aniversário

3 pessoas

**resultados desfavoráveis**

365

364

363

365 x 364 x 363
resultados
desfavoráveis

# Paradoxo do dia de aniversário

- Para 3 pessoas a probabilidade pedida é igual a

$$1-\frac{365\times364\times363}{365\times365\times365} = \mathbf{0.0082}$$

Em 0.82% das reuniões com 3 pessoas, há pelo menos duas que têm o mesmo dia de aniversário

# Paradoxo do dia de aniversário

- Fórmula de cálculo para 2 pessoas

$$1-\frac{365\times 364}{365\times 365}$$

- Fórmula de cálculo para 3 pessoas

$$1-\frac{365\times 364\times 363}{365\times 365\times 365}$$

# Paradoxo do dia de aniversário

- Fórmula de cálculo para 57 pessoas

$$1-\frac{365\times364\times\cdots\times309}{365\times365\times\cdots\times365}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{=\mathbf{0.9901!!!}}$$

# Paradoxo do dia de aniversário

Em 99.01% das reuniões com 57 pessoas, há pelo menos duas que têm o mesmo dia de aniversário

# Paradoxo do dia de aniversário

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 0.27% | 23 | 50.73% | 50 | 97.04% |
| 12 | 16.70% | 30 | 70.63% | 57 | 99.01% |
| 20 | 41.14% | 40 | 89.12% | 69 | 99.90% |

# Paradoxo do dia de aniversário

- Não devemos confundir o problema anterior com o seguinte:

**Qual é a probabilidade de alguém nesta sala ter o mesmo dia de aniversário que eu?**

# Paradoxo do dia de aniversário

3 pessoas além de mim

**resultados possíveis** | **resultados desfavoráveis**

eu

365 → ← 364

365 → ← 364

365 → ← 364

$365 \times 365 \times 365$

$364 \times 364 \times 364$

# Paradoxo do dia de aniversário

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 23 | 5.86% | 100 | 23.78% | 1000 | 93.55% |
| 57 | 14.24% | 254 | 50.05% | 2000 | 99.58% |
| 69 | 17.02% | 500 | 74.56% | 2518 | 99.90% |

# O paradoxo das coincidências

- Numa festa de natal os alunos de uma escola decidem dar presente uns aos outros.
- Cada um traz um presente que é misturado com os outros presentes.
- Os presentes são distribuídos ao acaso pelos alunos.

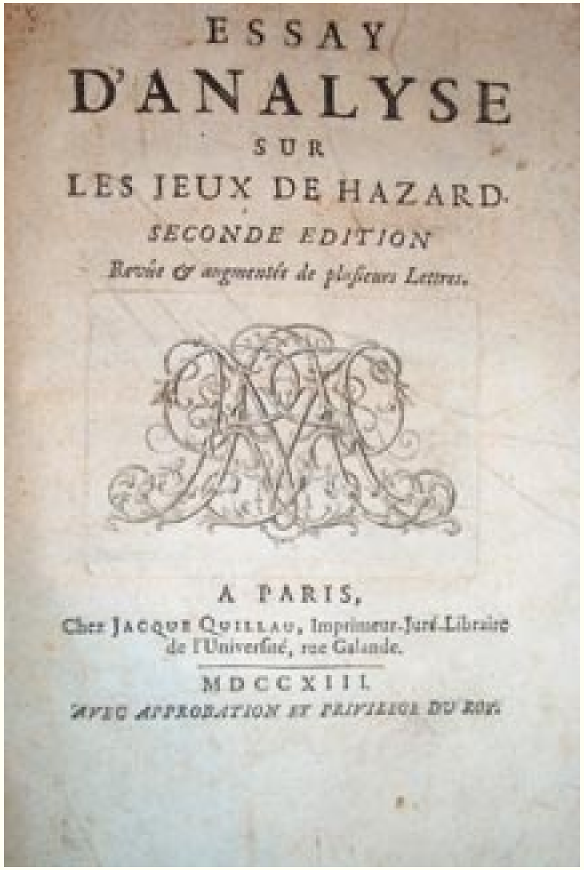
# O paradoxo das coincidências

Este procedimento é usado acreditando-se que, se o número de alunos for grande, a probabilidade de alguém receber o seu próprio presente deve ser muito pequena...

Será isto verdade?

# O paradoxo das coincidências

- Este problema é referido por Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) em 1708.


ESSAY
D'ANALYSE
SUR
LES JEUX DE HAZARD.
SECONDE EDITION
Revûe & augmentée de plusieurs Lettres.

A PARIS,
Chez JACQUE QUILLAU, Imprimeur-Juré-Libraire de l'Université, rue Galande.
MDCCXIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

# O paradoxo das coincidências

- Este problema é referido por Pierre Rémond de Montmort (1678-1719) em 1708.
- Uma tal probabilidade é dada por:

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$$

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | 4 | | 7 | |
| 2 | | 5 | | 8 | |
| 3 | | 6 | | 9 | |

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 4 | | 7 | |
| 2 | | 5 | | 8 | |
| 3 | | 6 | | 9 | |

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 4 | | 7 | |
| 2 | 50% | 5 | | 8 | |
| 3 | | 6 | | 9 | |

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 4 | | 7 | |
| 2 | 50% | 5 | | 8 | |
| 3 | 66.66% | 6 | | 9 | |

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 4 | 62.5% | 7 | |
| 2 | 50% | 5 | | 8 | |
| 3 | 66.66% | 6 | | 9 | |

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 4 | 62.5% | 7 | |
| 2 | 50% | 5 | 63.33% | 8 | |
| 3 | 66.66% | 6 | | 9 | |

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 4 | 62.5% | 7 | |
| 2 | 50% | 5 | 63.33% | 8 | |
| 3 | 66.66% | 6 | 63.19% | 9 | |

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 4 | 62.5% | 7 | 63.21% |
| 2 | 50% | 5 | 63.33% | 8 | |
| 3 | 66.66% | 6 | 63.19% | 9 | |

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 4 | 62.5% | 7 | 63.21% |
| 2 | 50% | 5 | 63.33% | 8 | 63.21% |
| 3 | 66.66% | 6 | 63.19% | 9 | |

# O paradoxo das coincidências

| nº | P | nº | P | nº | P |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 100% | 4 | 62.5% | 7 | 63.21% |
| 2 | 50% | 5 | 63.33% | 8 | 63.21% |
| 3 | 66.66% | 6 | 63.19% | 9 | 63.21% |

# O paradoxo das coincidências

$$1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\cdots+\left(-1\right)^{n+1}\frac{1}{n!}\simeq 1-e^{-1}=63.21$$

# Bibliografia


- Deheuvels, Paul (1990)
  La Probabilité, le Hasard et la Certitude,
  PUF.

- Hald, Anders (1990)
  A history of probability and statistics and their applications before 1750,
  Wiley.

- Székely, Gábor J. (1986)
  Paradoxes in probability theory and mathematical statistics,
  Reidel.