CE-227: Inferência Bayesiana – 1^a Prova (02/05/2018)

GRR: ________________ **Nome:** ____ **Turma:** _________

1. Seja $y_1, \ldots, y_n$ uma amostra aleatória de uma distribuição com função probabilidades:

$$f(y|\theta) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta^y}{y!} \ ; \ \ y = 0, 1, \ldots$$

e assume-se como distribuição a priori

$$f(\theta) = \mathrm{e}^{-\theta} \ ; \ \ 0 < \theta.$$

Obtenha a expressão da posteriori e da distribuição preditiva.

Obtenção da expressão da posteriori:

$$\begin{aligned}
f(y_i|\theta) &= \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta_i^y}{y_i!} \\
L(y|\theta) &= \frac{\mathrm{e}^{-n\theta}\theta^{\sum_i y_i}}{\prod_i y!} \\
f(\theta|y) &\propto f(\theta) \cdot L(y|\theta) \\
&= \mathrm{e}^{-\theta}\frac{\mathrm{e}^{-n\theta}\theta^{\sum_i y_i}}{\prod_i y!} \\
&\propto \mathrm{e}^{-(n+1)\theta}\theta^{\sum_i y_i} \\
\theta|y &= \mathrm{Ga}(1 + \sum_i y_i; 1/(n+1))
\end{aligned}$$

Obtenção da expressão da preditiva:

$$\begin{aligned}
f(y_0|y) &= \int f(y_0|\theta, y) f(\theta|y) \mathrm{d}\theta = \int f(y_0|\theta) f(\theta|y) \mathrm{d}\theta \\
&= \int \frac{\mathrm{e}^{-\theta}\theta_0^y}{y_0!} \frac{\theta^{\sum_i y_i}\mathrm{e}^{-(n+1)\theta}}{\Gamma(1+\sum_i y_i)(1/(n+1)^{1+\sum_i y_i})} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{(n+1)^{1+\sum_i y_i}}{y_0!\Gamma(1+\sum_i y_i)} \int \theta^{y_0+\sum_i y_i}\mathrm{e}^{-(n+2)\theta}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

```
> dados <- list(S=32, n=8)
> dpred <- Vectorize(function(y, data, log=FALSE){
+     res <- with(data, -lgamma(S+1) + (S+1)*log(n+1) - (y+1)*log(n+2))
+     return(ifelse(log, res, exp(res)))
+     }, "y")
> dpred(0:10, data=dados)

 [1] 1.174e-05 1.174e-06 1.174e-07 1.174e-08 1.174e-09 1.174e-10 1.174e-11 1.174e-12
 [9] 1.174e-13 1.174e-14 1.174e-15

> plot(0:100, sapply(0:100, dpred, data=dados))
```

2. Suponha que Y tenha uma distribuição de Pareto $\mathrm{Pa}(a, b)$, em que a é conhecido mas b é desconhecido. Desta forma,

$$f(y|b) = ba^b y^{-b-1} \ ; \ \ (y > a).$$

Encontre a priori de Jeffreys e a correspondente distribuição posteriori para b e a expressão da posteriori. Explique como poderiam ser obtidos resumos (média, mediana, quantis, intervalos) da distribuição posteriori neste caso.

3. A distribuição de falhas ao longo do comprimento de uma fibra artificial segue um processo de Poisson, de modo que o número de falhas de um comprimento l da fibra é $\text{Po}(l\theta)$. Pouco se sabe sobre θ. O número de falhas obtidos em 5 de fibras de comprimentos de 10, 15, 25, 30 e 40 metros, respectivamente, foram de 3, 2, 7, 6 e 10. Encontre a distribuição preditiva para o número de falhas em outra fibra com 60 metros de comprimento. Explique os passos que seriam executados para obter amostras e resumos da preditiva por simulação estocástica.

   A distribuição de probabilidade para a variável observável Y é:

$$f(y_i|\theta) = \frac{\mathrm{e}^{-L_i\theta}(L_i\theta)_i^y}{y_i!}$$

   A priori conjugada neste caso é uma distribuição Gama.

$$f(\theta|p,q) = \frac{q^p}{\Gamma(p)}\theta^{p-1}\mathrm{e}^{-q\theta}$$

   Obtenção da expressão da posteriori:

$$\begin{aligned}
L(y|\theta) &= \frac{\mathrm{e}^{-\theta\sum_i L_i}\prod_i(N_i^{y_i})\theta^{\sum_i y_i}}{\prod_i y!} \\
f(\theta|y) &\propto f(\theta)\cdot L(y|\theta) \\
&\propto \theta^{p+(\sum_i y_i)-1}\mathrm{e}^{-(q+\sum_i L_i)\theta} \\
\theta|y &\sim \text{Ga}(p+\sum_i y_i; q+\sum_i L_i)
\end{aligned}$$

   Obtenção da expressão da preditiva: