Séries temporais - 2011

Prof. Wagner Hugo Bonat

Laboratório de Estatística e Geoinformação
Universidade Federal do Paraná

20 de maio de 2011

Laboratório de Estatística
e Geoinformação

Grafos não direcionais

- São usados para representar a estrutura de independência condicional em um GMRF;
- Um grafo não direcional G é a dupla $G = (V, E)$;
- V é o conjunto dos nós; E é o conjunto das ligações i,j, onde $i,j \in V$;
- Conceito de vizinhança.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Distribuição Normal Multivariada

- $\pi(\underline{x}) = (2\pi)^{-n/2}|\Sigma|^{-1/2}\exp -\frac{1}{2}(\underline{x}-\mu)^\top\Sigma^{-1}(\underline{x}-\mu)$;
- Definimos $Q = \Sigma^{-1}$ como sendo a matriz de precisão do modelo.
- Seja $\underline{x}$ normal com média μ e maitrz de precisão $Q > 0$. Então para ij

$$x_i \perp x_j|\underline{x}_{-ij} \iff Q_{ij} = 0$$

- Isto significa que o padrão de 0's em Q determina o gafo G e vice-versa. Logo o grafo G pode ser usado para construir Q.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Gaussian Markov Random Field

- Um vetor aleatório $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Re^n$ é chamada um GMRF sobre o grafo $G = (V, E)$ com média μ e matriz de precisão $Q > 0$, se e somente se sua densidade tem a forma

$$\pi(\underline{x}) = (2\pi)^{-n/2}|Q|^{-1/2}\exp(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \mu)^\top Q(\underline{x} - \mu))$$

$$Q_{ij} \neq 0 \iff i,j \in E \quad \forall \quad i \neq j$$

.

Improper Gaussian Markov Random Field

- Seja Q um $n \times n$ matrix semi positiva definida com rank $n - k > 0$. Então $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ é GMRF impróprio de rank $n - k$ com parâmetros (μ, Q) se sua densidade é

$$\pi(\underline{x}) = (2\pi)^{\frac{-(n-k)}{2}} |Q^*|^{-1/2} \exp(-\frac{1}{2}(\underline{x} - \mu)^\top Q(\underline{x} - \mu))$$

$$Q_{ij} \neq 0 \iff i,j \in E \quad \forall \quad i \neq j$$

.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

IGMRF - Random Walk

- O modelo random walk de 1 ordem é construído assumindo incrementos independentes

$$x_j - x_i \sim N(0, (j-i)k^{-1}) \quad i < j$$

- A denside de $\underline{x}$ e dos $(n-1)$ incrementos é

$$k^{(n-1)/2} exp(-\frac{1}{2}\underline{x}^\top Q\underline{x})$$

- onde $Q = kR$ onde R é a matriz de estrutura.

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Autoregressivo de primeira ordem

- $x_t | x_{t-1}, \ldots, x_1 \sim N(\phi x_{t-1}, 1) \quad t = 2, \ldots, n;$
- $x_1 \sim N(0, (1 - \phi^2)^{-1}$ então
- Desenhar a matriz Q do ar(1).

Laboratório de Estatística e Geoinformação

Modelos hierárquicos

- $\underline{\text{Y}} \sim f(\underline{\text{y}}|\underline{\text{X}}, \phi)$;
- $\underline{\text{X}} \sim g(\underline{\text{x}}|\theta)$;
- Em geral a dependência entre as observações é induzida na distribuição $g(.|.)$ que normalmente é um GMRF.
- Para séries temporais o $ar1$, $rw1$ e o $rw2$ são comuns.
- Modelos com sazonalidade também são possíveis na mesma estrutura.
- O paradigma dominante quando $f(.|.)$ é diferente da Normal é o Bayesiano via técnincas MCMC.

Laboratório de Estatística e Geoinformação