Cadeias de Markov

Cadeias de Markov

É um tipo especial de processo estocástico, que satisfaz as seguintes condições:

- o parâmetro n é discreto (ex: tempo)
- o espaço de estados **E** é discreto (coleção de estados possíveis) **E** pode ser finito ou infinito e enumerável. Vamos considerar **E** finito. As cadeias de Markov deste tipo são chamadas Cadeias de Markov Finitas.
- o estado inicial do processo ou o espaço de estados é conhecido.
- vale a propriedade markoviana e a de estacionariedade.

Propriedade Markoviana

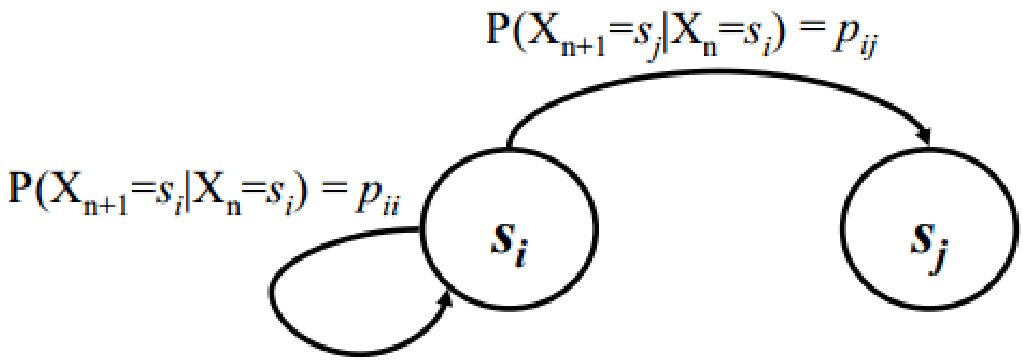
Para n = 1,2,..., e qualquer seqüência de estados possíveis s1, s2,...,sn+1, com Xn, Xn-1,..., X1 conhecidos:

$$P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_1 = s_1, X_2 = s_2, \ldots, X_n = s_n) =$$
$$= P(X_{n+1} = s_{n+1} \mid X_n = s_n)$$

Em palavras:

- As probabilidades de todos os estados futuros Xj (j>n) dependem somente do estado atual Xn, mas não dependem dos estados anteriores X1,..., Xn-1.
- O estado "futuro" do sistema depende do "presente", mas não depende do "passado".

Propriedade de Estacionariedade



- Probabilidades de transição: $P(X_{n+1}=s_j|X_n=s_i)$
- Probabilidades de transição estacionárias:

$$P(X_{n+1} = s_j \mid X_n = s_i) = cte. = p_{ij} \qquad n = 1,2,\ldots$$

- A cadeia de Markov é dita homogênea ou estacionária.

Matriz de Transição

- Cadeia de Markov Finita e Estacionária K possíveis estados: s1, s2,...,sk

$$
P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \end{array}
$$

$$pij \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^{k} pij = 1, \qquad i = 1,\ldots k$$

Equação de Chapman-Kolmogorov

Sejam:

- P a matriz de transição de uma cadeia de Markov.
- O elemento $p_{ij}^{(n)}$ da matriz $P^{(n)}$ representa a probabilidade de que o processo, iniciado no estado s_i, estará no estado s_j, depois de n passos.
- u um instante qualquer entre 0 e n.

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}^{(u)} . p_{rj}^{(n-u)}, \quad 0 < u < n$$

ou, alternativamente:

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = s_j \mid X_1 = s_i) = \sum_{r=1}^{k} p_{ir}^{(n-1)} p_{rj}, \quad n = 1,2,\dots$$

Vetor de Probabilidades Iniciais (a priori)

Em muitas situações, não conhecemos o estado da Cadeia de Markov no instante inicial.

Cadeia de Markov Finita e Estacionária k possíveis estados: s1, s2,...,sk
Para i=1,...,k:
Vi = probabilidade de que o processo esteja no estado si no instante inicial

$$v_i \geq 0 \qquad \text{e} \qquad \sum_{i=1}^{k} v_i = 1$$

A qualquer vetor w = (w1,..,wk), tal que wi≥ 0 e w1+w2+...+wk=1 chamamos vetor de probabilidades.
O vetor v =(v1,..., vk) é chamado vetor de probabilidades iniciais, pois representa as probabilidades dos vários estados da cadeia no instante de início do processo.

Teorema:

- Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov
- **v** o vetor de probabilidades iniciais.
- Então, a probabilidade de que o processo esteja no estado sj depois de n passos é a j-ésima componente do vetor:

$$\mathbf{v}^{(n)} = \mathbf{v}.P^n$$

onde:

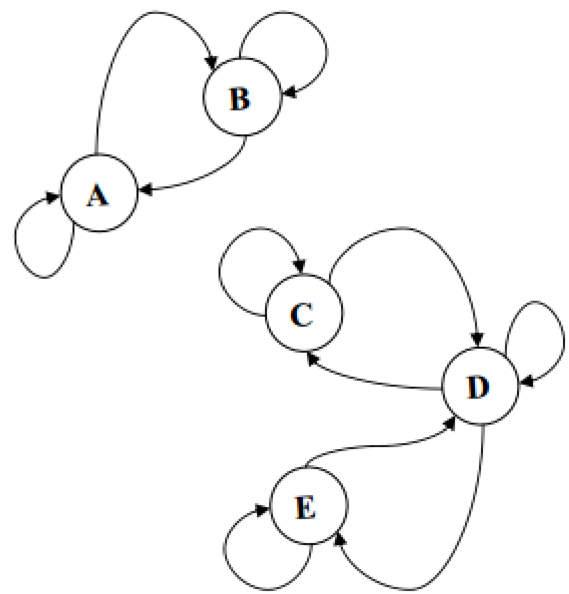
$\mathbf{v}^{(\mathrm{n})} = [v_1^{(\mathrm{n})}\ v_2^{(\mathrm{n})} \ldots v_k^{(\mathrm{n})}]$

$v_i^{(\mathrm{n})} = \mathrm{P}(\mathrm{Xn}{=}s_i)$

Classificação de Estados

A fim de ilustrar as próximas definições, vamos utilizar a Cadeia de Markov representada a seguir:

$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$



Definição: *Caminho*

Dados dois estados s*i* e s*j*, um caminho entre s*i* e s*j* é uma seqüência de transições que começam em si e terminam em sj, tais que cada transição tem uma probabilidade positiva de ocorrência.

- Um estado sj é **acessível** a partir do estado si se existe um caminho que liga si a sj.
- Dois estados si e sj são **comunicáveis** se sj é acessível a partir de si e si é acessível a partir de sj.

- Um conjunto de estados **E** em uma cadeia de Markov é uma classe se nenhum estado fora de **E** é acessível por qualquer estado em **E**.

  Se a cadeia inteira é formada por <u>uma única classe</u>, isto é, todos os estados são comunicáveis, a cadeia é dita **irredutível**.
- Um estado si é absorvente se pii = 1.
- Um estado si é transiente se existe um estado sj que é acessível a partir de si, mas o estado si não é acessível a partir de sj.
- Se um estado não é transiente ele é recorrente.

- Um estado si é **periódico** com período T>1 se T é o menor número tal que todos os caminhos que levam do estado si de volta a si tem comprimento múltiplo de T. Se um estado recorrente não é periódico ele é **aperiódico**.

- Se todos os estados em uma Cadeia de Markov são **recorrentes**, **aperiódicos** e **comunicáveis** entre si, então a cadeia é dita **ergódica**.

Referencias

- Notas de aula, Ricardo Nogueira.

- http://www.mec.ita.br/