

Probabilidades

última atualização: 5 de junho de 2012

1. (B. & M.) Um empreiteiro apresentou orçamentos separados para a execução da parte elétrica e da parte de encanamento de um edifício. Ele acha que a probabilidade de ganhar e concorrência da parte elétrica é de $1/2$. Caso ganhe a parte elétrica, a chance de ganhar a parte de encanamento é de $3/4$; caso contrário, essa probabilidade é de $1/3$.
 - (a) Qual a probabilidade de ele:
 - ganhar os dois contratos?
 - ganhar apenas um dos contratos?
 - não ganhar nenhum contrato?
 - (b) os eventos "ganhar o contrato elétrico" e "ganhar o contrato hidráulico"
 - são independentes? (justifique)
 - são mutuamente exclusivos? (justifique)
2. Considere o lançamento de uma moeda 10 vezes.
 - (a) Se voce lançar a probabilidade de obter a face "cara" em todos os lançamentos?
 - (b) Considere agora que 1.000 pessoas fazem o mesmo. Qual a probabilidade de que alguém obtenha 10 "caras"?
 - (c) Qual(ais) a(s) suposição(ções) feita(s) nos cálculos?
 - (d) Discuta e interprete os resultados.
3. Registros de um laboratório mostram que 1 a cada 20 amostras de um determinado material são perdidas por contaminação. Responda cada um dos seguintes itens declarando a variável aleatória e a sua distribuição.
 - (a) Se forem feitas 15 análises qual a probabilidade de que no máximo uma seja contaminada.
 - (b) Em um teste para avaliar a contaminação análises serão feitas sequencialmente até que a primeira contaminada seja encontrada. Quantas análises espera-se fazer? Como voce calcularia a probabilidade de que o esse número de análises não chegue a 5?
 - (c) O teste anterior foi repetido porém até que a terceira análise mostrasse contaminação. Em um particular ensaio foram feitas 10 análise desta forma. Qual a probabilidade desta ocorrência?
 - (d) Um lote contendo 40 amostas das quais 15 eram contaminadas foi enviado para teste em outro laboratório na qual 12 amostras foram selecionadas ao acaso para testes. Qual a probabilidade de encontrar 3 ou mais contaminadas entre as selecionadas?
 - (e) Considere agora que o laboratório faz um grande número de análises por mês e registra uma média de 2,5 casos de contaminação grave. Qual a probabilidade de que em um determinado mês não se registre nenhuma contaminação? E de que seja registradas mais do que 5 contaminações?
4. Um algoritmo de classificação deve tentar resolver corretamente dois problemas, A e B . A probabilidade resolver A corretamente é de 0,6. Caso resolva A corretamente, a probabilidade de resolver B corretamente é de 0,85; caso contrário, essa probabilidade é de 0,25.
 - (a) Qual a probabilidade de ele:
 - resolver corretamente os dois problemas?
 - resolver corretamente apenas um dos problemas?

- não resolver nenhum corretamente?
- (b) os eventos "resolver corretamente A " e "resolver corretamente B ",
- são independentes? (justifique)
 - são mutuamente exclusivos? (justifique)
5. Responda as questões a seguir declarando a variável aleatória e a sua distribuição.
- (a) Registros de um sistema mostram que 1 a cada 20 requisições de acesso de um determinado serviço não são completadas.
- i. Se forem feitas 15 requisições qual a probabilidade de que no máximo duas não sejam completadas.
 - ii. Em um teste para avaliar o sistema requisições serão feitas sequencialmente até que a primeiro acesso não seja completado. Se este teste for feito diversas vezes, anotando-se o número de acessos a cada teste, qual deve ser o valor da média do número de acessos? Como voce calcularia a probabilidade de que o esse número de acessos não chegue a 5?
 - iii. O teste anterior foi repetido porém até que o terceiro acesso não fosse completado. Em um particular ensaio foram feitas 10 análise desta forma. Qual a probabilidade desta ocorrência? Se este teste for repetido diversas vezes e o número de acessos anotado, qual deve ser a média do número de acessos?
6. Tem-se um conjunto de 40 sensores das quais 15 estão danificados. Uma transmissão é feita para 12 sensores foram selecionadas ao acaso. Qual a probabilidade da transmissão ter sido enviada para 4 ou mais sensores operantes?
7. Considere agora uma transmissão de dados que tem uma taxa de falha de 5,2 falhas por hora. Qual a probabilidade de que em um intervalos de 15 minutos não haja nenhuma falhas de transmissão? E de que seja registradas mais do que 4 falhas?
8. Mostre que as funções a seguir são funções de densidade de probabilidade (f.d.p.) para algum valor de k e determine o valor de k .
- $f_1(x) = k_1(1 + 2x)$ para $0 < x < 2$.
 - $f_2(x) = k_2x^2$ para $0 < x < 4$.
- Obtenha para cada uma das distribuições:
- $F(x)$
 - $E[X]$
 - $P[X > 1]$
9. O tempo de montagem de um determinado mecanismo é uma v.a. uniforme mo intervalo de 30 a 40 segundos. Determine:
- as expressões de $f(x)$ e $F(x)$;
 - a probabilidade da montagem ser feita em menos que 33 segundos;
 - a probabilidade da montagem ser feita em menos que 38 segundos, sabendo que foi maior que 35 segundos;
 - o tempo abaixo do qual 80% das montagens são feitas;
 - o tempo esperado para montagem de 5.000 peças;
 - o custo esperado para montagem de 5.000 peças sabendo que montagens abaixo de 33 segundos tem custo de R\$1,00, entre 33 e 38 segundos o custo é de R\$1,50 e acima de 38 segundos o custo é de R\$3,00.
10. Um lote de 120 containers de laranjas contém 25 que estão contaminados. São selecionados ao acaso e sequencialmente 15 containers para inspeção. Quais as probabilidades de que:
- (a) nenhum contaminado seja selecionado?
 - (b) mais que 2 contaminados sejam encontrados?

- (c) de que o segundo inspecionado esteja contaminado sendo que o primeiro era contaminado?
- (d) de que os cinco primeiros não sejam contaminados?
11. Em um grupo de estudantes 45% são do curso A , 25% do curso B o restante do curso C . A proporção de mulheres em cada curso um dos cursos é de 20, 50 e 75%, respectivamente. Se um estudante é sorteado qual a probabilidade de:
- (a) seja homem;
- (b) seja do curso A , sabendo que foi sorteada uma mulher;
- (c) seja do curso C sabendo que foi sorteado um homem.
12. Em um grupo de estudantes 45% são do curso A , 25% do curso B o restante do curso C . A proporção de mulheres em cada curso um dos cursos é de 20, 50 e 75%, respectivamente. Se um estudante é sorteado qual a probabilidade de:
- (a) seja homem;
- (b) seja do curso A , sabendo que foi sorteada uma mulher;
- (c) seja do curso C sabendo que foi sorteado um homem.
13. A probabilidade de ocorrer falha/corrupção na cópia de um arquivo é de 0,03. Em 10.000 cópias feitas em um sistema mostre como calcular as probabilidades a seguir de ao menos duas maneiras diferentes.
- (a) De que não ocorram falhas;
- (b) de que ocorram o máximo três falhas;
- (c) de que ocorram no máximo quatro falhas, sabendo que ao menos uma falha ocorreu.
14. Considere a função $f_X(x) = k(1 + 2x) I_{(0,2)}(x)$
- mostre que $f(x)$ é função de densidade de probabilidade (f.d.p.) para algum valor de k e determine o valor de k .
 - obtenha $F(x)$
 - obtenha $E[X]$
 - obtenha $P[X > 1]$
 - obtenha a tal que $P[X < a] = 0,6$
15. O tempo de montagem de um determinado mecanismo é uma v.a. uniforme no intervalo de 30 a 40 segundos. Determine:
- as expressões de $f(x)$ e $F(x)$;
 - a probabilidade da montagem ser feita em menos que 33 segundos;
 - a probabilidade da montagem ser feita em menos que 38 segundos, sabendo que foi maior que 35 segundos;
 - o tempo abaixo do qual 80% das montagens são feitas;
 - o tempo esperado para montagem de 5.000 peças;
 - o custo esperado para montagem de 5.000 peças sabendo que montagens abaixo de 33 segundos tem custo de R\$1,00, entre 33 e 38 segundos o custo é de R\$1,50 e acima de 38 segundos o custo é de R\$3,00.
16. João e Maria estão fazendo um curso de matemática onde as notas são dadas em conceitos A , B ou C . A probabilidade de João ter conceito B é 0,3 e a de Maria é de 0,4. A probabilidade de que nenhum deles tenha um A mas ao menos um tenha B é de 0,1. Qual o probabilidade de que ao menos um tenha um B menos nenhum tenha um C ?
17. Acredita-se que numa certa população, 20% de seus habitantes sofrem de algum tipo de alergia e são classificados como alérgicos para fins de saúde pública. Sendo alérgico, a probabilidade de ter reação a um certo antibiótico é 0,5. Para os não alérgicos essa probabilidade é de apenas 0,05. Uma pessoa dessa população teve reação ao ingerir o antibiótico, qual a probabilidade de:
- a) ser do grupo não alérgico? b) ser do grupo alérgico?

18. Seja X uma variável aleatória com densidade $f(x) = \kappa x^2 I_{[-1,1]}(x)$.
- Determine o valor da constante κ .
 - Calcule $P(|X| > 1/2)$.
 - Ache o valor de A tal que $F(A) = P(X \leq A) = 1/4$.
 - Calcular $E(X)$.
19. Laminas de metal apresentam defeitos no cromado, segundo uma distribuição de Poisson, com uma média de 0,8 defeito por m^2 . Essas laminas são usadas para construção de janelas para uma instalação industrial cuja dimensões são de 150×200 cm.
- Qual o número esperado de falhas por janela?
 - Qual a probabilidade de uma janela não apresentar defeito?
 - Sabendo que uma janela tem defeito(s) qual a probabilidade de ter mais que um defeito?
 - Em um grupo 10 dessas janelas qual é a probabilidade de que no máximo 2 delas não tenha nenhum defeito?
 - Em 500 lotes de 3 janelas, quantos espera-se que não apresentem nenhuma janela com defeito?
20. Um time de futebol tem probabilidade 0,70 de vitórias sempre que joga. Se o time atuar 4 vezes determine a probabilidade de que vença:
- todas as 4 partidas.
 - exatamente 2 partidas.
 - pelo menos uma partida.
 - no máximo 3 partidas.
 - mais da metade das partidas.
21. Em uma fábrica, a máquina A produz por dia o triplo de peças que a máquina B e, a máquina C o quádruplo da máquina A. Sabe-se que 6% das peças fabricadas pela máquina A tendem a ser defeituosas, 4% das peças produzidas pela máquina B tendem a ser defeituosas, enquanto 8% de peças defeituosas da máquina C. A produção diária de todas as máquinas é misturada. Extraída uma amostra aleatória (com reposição) de 20 peças, qual é a probabilidade de que essa amostra contenha:
- No máximo duas peças defeituosas?
 - Entre três e cinco peças defeituosas?
 - Se uma peça é defeituosa, qual a probabilidade de ter vindo da máquina A?
22. Um exame de múltipla escolha consiste em 10 questões, cada uma com cinco possibilidades de escolha. A aprovação exige no mínimo 50%. Qual a chance de aprovação, se:
- O candidato comparece ao exame sem saber absolutamente nada, apelando apenas para o palpite.
 - O candidato tem um conhecimento parcial do conteúdo, suficiente para poder eliminar três escolhas, devendo então apenas entre as duas escolhas restantes.
23. O Departamento de Matemática é formado por 35 professores, sendo 21 homens e 14 mulheres. Uma comissão de 3 professores será constituída, sorteando-se, ao acaso, três membros do departamento.
- Qual a probabilidade a comissão ser formada somente por homens?
 - Qual a probabilidade a comissão ser formada por pelo menos duas mulheres?
 - O valor esperado e variância do número de mulheres na comissão.
 - A função de distribuição acumulada.
24. Uma pessoa está discando um número de telefone e conhece todos os dígitos, mas esqueceu-se somente da ordem dos últimos três (que são algarismos diferentes). Essa pessoa discar, variando aleatoriamente esses três últimos dígitos, até encontrar o número correto. Admitindo que não repita números discados, qual é a probabilidade de ser necessário discar 5 números errados antes de acertar?

25. Ainda no contexto da questão anterior, assuma agora que a pessoa não sabe quais são os 3 últimos dígitos e resolve tentar aleatoriamente podendo ainda repetir o número discado.

- qual a probabilidade de conseguir em, no máximo 4, tentativas?
- qual seria o número esperado de tentativas para se conseguir discar o número correto?

26. Para cada uma das funções abaixo diga se é uma f.d.p. (função de densidade de probabilidade) válida justificando a resposta.

- a) $f(x) = 1 - x$; $0 < x < 2$
- b) $f(x) = (1/2) \exp\{-x/2\}$; $0 < x < +\infty$
- c) $f(x) = 3x^2$; $-1 < x < 0$
- d) $f(x) = |x - 1|/2$; $0 < x < 2$
- e) $f(x) = 1/10$; $-0,1 < x < 0,1$

27. Na comunicação entre servidores, uma mensagem é dividida em n pacotes, os quais são enviados na forma de códigos. Pelo histórico da rede sabe-se que cada pacote tem uma probabilidade de 0,01 de não chegar corretamente a seu destino, e além disto, assume-se que o fato de um pacote chegar ou não corretamente ao destino não altera a probabilidade de chegada correta de outros pacotes. Um programa corretivo, garante o envio correto da mensagem quando o número de pacotes enviados erroneamente não passar de 10% do total de pacotes da mensagem.

- (a) Qual a probabilidade de uma mensagem composta de 20 pacotes ser enviada corretamente?
- (b) e para uma mensagem de 200 pacotes?

28. O tempo para que um sistema execute determinada tarefa é uma variável aleatória com distribuição normal, com média de 320 segundos e desvio padrão de 8 segundos.

- (a) qual a probabilidade da tarefa ser executada em menos que 300 segundos?
- (b) qual a probabilidade da tarefa ser executada em mais que 330 segundos?
- (c) qual o tempo abaixo do qual espera-se executar 90% das tarefas?
- (d) cobra-se 5 centavos por tarefas executadas em menos que 310 segundos, 3 centavos entre 310 e 325 segundos e não se cobra para tarefas executadas acima de 325 segundos. Qual o valor esperado do pagamento por 100.000 tarefas executadas?

29. O consumo de combustível de uma frota de ônibus é uma v.a. medida pelo rendimento em km/l que tem distribuição normal com média de 8,2 e desvio padrão de 0,7. Selecionando-se um veículo ao acaso qual a probabilidade de

- (a) ter rendimento inferior a 7,0 km/l ,
- (b) ter rendimento acima de 9,0 km/l ,
- (c) ter rendimento entre 8,0 e 8,5 km/l .

Selecionando-se uma amostra de 5 veículos, qual a probabilidade de que

- (d) nenhum deles tenha rendimento inferior a 7,0 km/l
- (e) ao menos 2 tenham rendimento entre 8,0 e 8,5 km/l .

Considerando-se ainda a amostra de 5 veículos, que a probabilidade de que

- (f) o rendimento médio esteja entre 8,0 e 8,5 km/l ,
- (g) o rendimento médio esteja abaixo de 7,5 km/l .

30. Em uma montadora, três fábricas, A , B e C são responsáveis por 20, 50 e 30% do total de certa peça utilizada, respectivamente. De cada fábrica, 20, 5 e 2% respectivamente, das peças apresentam problemas antes do vencimento da garantia. É detectado problema em uma peça na montadora. Qual a probabilidade de ter sido fornecida pela fábrica A ? E pela fábrica C ?

31. O rendimento de uma frota de veículos de uma locadora tem a seguinte f.d.p. e calcule o solicitado.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{k(x-5)}{2} & \text{se } 5 \leq x < 7 \\ \frac{k(11-x)}{4} & \text{se } 7 \leq x \leq 11 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- (a) valor de K;
 - (b) $P[X > 10]$
 - (c) $P[7,5 < X < 9,5]$
 - (d) consumo médio
 - (e) consumo mediano
32. Um time de futebol tem probabilidade 0,70 de vitórias sempre que joga. Se o time atuar 4 vezes determine a probabilidade de que vença:
- (a) todas as 4 partidas.
 - (b) exatamente 2 partidas.
 - (c) pelo menos uma partida.
 - (d) no máximo 3 partidas.
 - (e) mais da metade das partidas.
33. Considere agora que o time tem probabilidade 0,7 de vitória, 0,25 de empate e 0,05 de perder quando joga em casa e 0,5 de vitória, 0,3 de empate e 0,2 de derrota quando joga fora. O time ganha 3 pontos quando vence, 1 quando empata e não marca pontos quando perde. Se vai jogar uma partida em casa e uma fora, qual a probabilidade de:
- (a) não marcar pontos,
 - (b) marcar 4 pontos,
 - (c) marcar 6 pontos.
 - (d) qual o número esperado de pontos marcados em um par de partidas sendo uma em casa e outra fora. Como este resultado deve ser interpretado?
34. Certo tipo de fusível tem duração de vida que segue uma distribuição (f.d.p.) exponencial com tempo médio de vida de 100 horas. Cada peça tem um custo de 10,0 unidades monetárias (u.m.) e se durar menos de 20 horas, existe um custo adicional de 8,0 u.m..
- (a) Qual é a probabilidade de uma durar mais de 150 horas?
 - (b) Qual é a probabilidade de uma durar entre 50 e 120 horas?
 - (c) Qual é a probabilidade de uma durar mais de 250 horas sabendo que já durou mais que 100 horas?
 - (d) Determinar o custo esperado de um lote de 10.000 peças.
35. Um vendedor de automóveis sabe que o número de carros vendidos por dia em sua loja comporta-se como uma variável de Poisson cuja média é 2,2 nos dias de bom tempo, e de 0,9 nos dias chuvosos. Se em 65% dos dias faz bom tempo, qual é a probabilidade de que:
- (a) não seja vendido nenhum automóvel em um certo dia.
 - (b) em certo dia do ano sejam vendidos pelo menos três automóveis.
 - (c) qual o número espera de automóveis vendidos em um mês (24 dias úteis).
 - (d) indique (sem fazer as contas) como seria calculada a probabilidade de que em uma semana (6 dias úteis) fossem vendidos pelo menos 10 carros.
36. Sabe-se que com determinado tratamento alcança 60% de curas para certa doença quando o mesmo é administrado a pacientes em condições bem definidas. Se tratamento for aplicado a 20 pacientes nessas condições, qual é probabilidade de que:

- (a) Ocorram no máximo 5 curas?
- (b) Ocorram no mínimo 9 e no máximo 11 curas ?
- (c) Qual é o número esperado de curas? E qual a variância?

37. O tempo de duração(em anos) de certo microprocessador, é considerado uma variável aleatória contínua com função de densidade de probabilidade $f(x) = e^{-\frac{x-k}{10}} I_{[2,\infty)}(x)$.

- (a) Determine a constante k para que $f(x)$ seja uma função de densidade de probabilidade.
- (b) Determine e interprete $E(X)$ e $Var(X)$;
- (c) Qual é a probabilidade de um microprocessador dure mais de 5 anos em uma escolha aleatória?
- (d) Determine a função de distribuição acumulada da variável tempo de vida.
- (e) Se um microprocessador já está em funcionamento por 7 anos, qual é a probabilidade que dure outros 2 anos?

38. O tempo de afastamentos por motivo de saúde solicitadas em um órgão público em um mês tem distribuição normal de média 250 horas e desvio padrão de 25 horas. Qual a probabilidade de que o tempo de afastamento no próximo mês:

- (a) fique entre 200 e 300 horas;
- (b) não ultrapasse 280 horas;
- (c) se afaste de média por mais de 40 horas.

Qual o tempo de afastamento que

- (d) é superado com probabilidade de apenas 0,05;
- (e) deve se superado em 90% dos meses.

39. O tempo de atendimento a usuários em uma central de atendimento tem distribuição normal de média 12 minutos de desvio padrão de 2 minutos. Qual a probabilidade de que uma chamada dure:

- (a) dure menos que 10 minutos;
- (b) mais que 15 minutos.

Se um atendente recebe 36 chamadas em um dia, qual a probabilidade de que:

- (c) o tempo total de atendimento ultrapasse 7 horas;
- (d) o tempo médio de atendimento ultrapasse 12,5 minutos.

Pretende-se reduzir o tempo total médio de atendimento. Encontre quantas chamadas por dia o atendente deve receber para que

- (e) o tempo total médio seja de 6 horas;
- (f) o tempo total não ultrapasse 6 horas com 0,90 de probabilidade.

Se um atendente trabalhar um período de 4 horas qual a probabilidade de

- (g) conseguir atender ao menos 18 chamadas.