Prova de Estatística

1. Seja X uma variável aleatória com função de probabilidades dada por $f(x) = pq^x$, para $x = 0, 1, 2, \ldots$ (geométrica), onde X representa o número de tentativas até o aparecimento do primeiro sucesso, $0 \leq p \leq 1$ e $q = 1 - p$.

   (a) Mostre que $f(x) = P(X = x)$ é realmente uma função de probabilidade (1 ponto).

   (b) Mostre que $E(X) = \dfrac{q}{p}$ (1 ponto).

   DICA:

   i) $\dfrac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$;

   ii) $\dfrac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n} f(x) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{d}{dx}f(x)$, onde a derivade existe;

   iii) $\sum_{i=0}^{\infty} a_1 q^n = \dfrac{a_1}{1-q}$ (P.G. infinita).

   SOLUÇÃO:

   (a) $$\sum_{x=0}^{\infty} p\,q^x = p\sum_{x=0}^{\infty} q^x = p\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = p\,\frac{1}{1-q} = \frac{p}{\big(1-(1-p)\big)} = 1$$

   (b) $$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\,p\,q^x = p\,q\sum_{x=0}^{\infty} x\,q^{x-1} = p\,q\sum_{x=0}^{\infty}\frac{d}{dx}q^x = p\,q\frac{d}{dx}\sum_{x=0}^{\infty}q^x = p\,q\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-q}\right) = \frac{p\,q}{(1-q)^2} = \frac{p\,q}{p^2} = \frac{q}{p}$$

2. Numa cidade é selecionada uma amostra de 60 adultos e a esses indivíduos é pedido para opinarem se são a favor ou contra determinado projeto. Como resultado obtido, observou-se 40 a favor.

   (a) Se na realidade as opiniões pró e contra são igualmente divididas, qual é a probabilidade de ter obtido tal resultado? (1 ponto)

   DICA: $P(X = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$; $k = 0, \ldots, n$; $0 \leq p \leq 1$.

   (b) Qual o número médio de pessoas a favor do projeto? (1 ponto).

   DICA: $E(X) = np$ e $Var(X) = np(1-p)$

   SOLUÇÃO:

   (a) $\binom{60}{40}0.5^{40}(1-0.5)^{20} = 0,003636$

   (b) $E(X) = 60 \cdot 0,5 = 30$

3. Suponha que X tenha densidade gama de parâmetros α e β. Então:

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}; \qquad x > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

Mostre que a função geratriz de momentos é: $M_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$ (2 pontos).

DICA: $\int_0^\infty x^{a-1} e^{-bx} dx = \frac{\Gamma(a)}{b^a}$

SOLUÇÃO:

$M_X(t) = E(e^{tx}) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\beta - t)x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta - t)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$

4. Considerando-se que $E(X^n) = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)\Big|_{t=0}$ e que $M_X(t) = \frac{p}{1 - qe^t}$ é a função geratriz de momentos de $X \sim Geom(p)$ (geométrica), determine $E(X)$ (2 pontos).

SOLUÇÃO:

$E(X) = \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{1 - qe^t}\right)\Big|_{t=0} = p\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1 - qe^t}\right)\Big|_{t=0} = p\,q\,\frac{1}{(1 - qe^t)^2}\Big|_{t=0} = \frac{p\,q}{(1 - 1 + p)^2} = \frac{q}{p}$

5. A variável aleatória contínua X de função densidade de probabilidades dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 6(x - x^2) & \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcular $P(\mu - 2\sigma < x < \mu - 2\sigma)$ onde $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = Var(X)$ (2 pontos).

SOLUÇÃO:

$E(X) = \int_0^1 x\,6(x - x^2) dx = 6\int_0^1 x^2 dx - 6\int_0^1 x^3 dx = 6\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 6\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{1}{2} = \mu.$

$E(X^2) = \int_0^1 x^2\,6(x - x^2) dx = 6\int_0^1 x^3 dx - 6\int_0^1 x^4 dx = 6\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - 6\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{6}{4} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10} = \sigma.$

$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{20} = \sigma^2.$

$\sigma = \frac{1}{\sqrt{20}} \simeq 0,22$

$P(\mu - 2\sigma < x < \mu - 2\sigma) = P(0,06 < x < 0,94) = \int_{0,06}^{0,94} 6(x - x^2) dx = 6\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{0,06}^{0,94} = 6\left[\frac{0,94^2 - 0,06^2}{2} - \frac{0,94^3 - 0,06^3}{3}\right] = 0,96$