Noções de Probabilidade e Estatística
Resolução dos Exercícios Pares

Gledson Luiz Picharski

July 26, 2007

Capitulo 2

Seção 2.1

Exerício 2

Os eventos podem ser traduzidos pela seguinte notação.

a) $(A \cup B)$

b) $(A \cap B^c)$

c) $(A \cap B)^c$

d) $(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$

Exerício 4

Existem algumas maneiras de se chegar ao mesmo resultado, de forma bem simples atingiremos este objetivo, como segue.

```
> p <- (A.uni.B = 0.5) - (A = 0.2) + (A.inter.B = 0.1)
> p
```

```
[1] 0.4
```

Seção 2.2

Exerício 2

a) Sendo os dois eventos disjuntos a intersecção entre eles é 0, então temos:

```
> x <- -(A = 0.5) + (A.uni.B = 0.8) + (A.inter.B = 0)
> x
```

```
[1] 0.3
```

b)

```
> # A.inter.B = 0.5 * x
> x <- (-(A=0.5)+(A.uni.B = 0.8))/0.5
> x
```

```
[1] 0.6
```

Exerício 4

Pelo teorema de Bayes podemos chegar a seguinte conclusão:

```
> x <- ((A = 0.7) - (A.inter.B = 0.3))/(B. = 0.6)
> x
```

```
[1] 0.6666667
```

Exerício 6

A probabilidade em questão é obtida usando o teorema de Bayes, o desenvolvimento aparece a seguir:

```
> G.dado.C <- 0.7
> C <- 0.3
> G.dado.c <- 0.8
> C.inter.G <- G.dado.C * C
> c.inter.G <- G.dado.c * (1 - C)
> G <- C.inter.G + c.inter.G
> x <- (C.inter.G)/G
> x
```

```
[1] 0.2727273
```

Seção 2.3

Exerício 2

Geramos atrávez dos comandos a seguir o nosso conjunto amostral, onde é feita a suposição de A e B serem negativos, enquanto C e D são positivos, colo N no lugar dos negativos e P para os positivos já que para a resolução do exercício o que importa é apenas o sinal.

```
> num <- LETTERS[1:4]
> possiveis <- length(rep(num, 4))
> prob <- data.frame(sorteio.1 = rep(num, each = 4), sorteio.2 = rep(num,
+     4), Prob = 1/possiveis)
```

a) Para perceber quais são meus casos favoraveis testo a linha em que temos apenas um número negativo, assim consigo a probabilidade deste evento, como é demonstrado pelos comandos a seguir.

```
> favoraveis <- with(prob, sum(((sorteio.1 != sorteio.2)) & (((sorteio.1 ==
+     "A") | (sorteio.1 == "B")) & ((sorteio.2 == "C") | (sorteio.2 ==
+     "D"))) | (((sorteio.2 == "A") | (sorteio.2 == "B")) & ((sorteio.1 ==
+     "C") | (sorteio.1 == "D")))))
> favoraveis/possiveis

[1] 0.5
```

Podemos verificar que existem 8 casos favoraveis em 16possiveis, então a probabilidade de somente um deles ser negativo é de 0.5

b) Se o quociente é negativo, somente um deles é negativo, o que implica em fazer o mesmo teste do item a, onde obtemos 0.5.

c) O teste é feito de forma semelhante ao item a, assim conseguimos encontrar a probabilidade dos dois números terem o mesmo sinal.

```
> favoraveis.c <- with(prob, sum(((sorteio.1 == sorteio.2)) | (((sorteio.1 ==
+     "A") & (sorteio.2 == "B")) | ((sorteio.1 == "B") & (sorteio.2 ==
+     "A"))) | (((sorteio.1 == "C") & (sorteio.2 == "D")) | ((sorteio.1 ==
+     "D") & (sorteio.2 == "C")))))
> favoraveis.c/possiveis

[1] 0.5
```

Pela demosntração feita percebemos que temos 8 casos provaveis em 16 possiveis, resultando em uma probabilidade de 0.5.

Exerício 4

As probabilidades são facilmente calculadas a seguir.

a) $P(A \cup M^c) = P(A) + P(M^c) - P(A \cap M^c)$
$\frac{22}{32} + \frac{20}{32} - \frac{14}{32} = 0.875$

b) $P(A^c \cap M^c) = P(A^c) + P(M^c) - P(A^c \cup M^c)$
$\frac{10}{32} + \frac{20}{32} - \frac{24}{32}$
0.1875

c) $P(A|M) = \frac{P(A \cap M)}{P(M)}$
$\frac{8}{32} + \frac{12}{32} = 0.625$

d) $P(M^c|A) = \frac{P(M^c \cup A)}{P(A)}$
$\frac{14}{22} = 0.6367$

e) $P(M|A) = \dfrac{P(M \cup A)}{P(A)}$

$\dfrac{8}{22} = 0.3636$

Exercício 6

A Figura 1 mostra o diagrama em questão.

```
> plot(1:100, 1:100, ty = "n", main = "", xlab = "", ylab = "",
+     axes = F)
> rect(1, 3, 99, 97)
> symbols(30, 50, circles = 28, inches = F, add = T)
> symbols(70, 50, circles = 28, inches = F, add = T)
> text(50, 50, expression(paste("A", intersect(B, , ))))
> text(30, 83, "A")
> text(70, 83, "B")
> text(30, 50, expression(paste("A", intersect(B^c, , ))))
> text(25, 8, expression(paste("A = A", intersect(B^c, , ), "+ ",
+     "A", intersect(B, , ))))
```

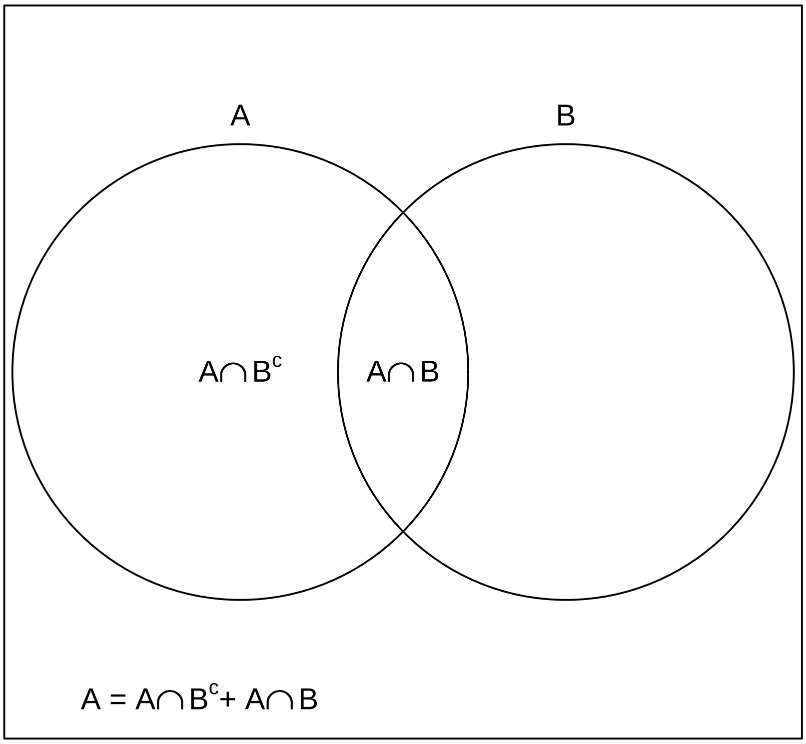

Figure 1: Diagrama dos eventos A e B.

Exercício 8

Usando os comandos a seguir, obtenho a Tabela 1.

```
> freq <- c(136, 102, 92, 195, 248, 62)
> Sexo <- rep(rep(c("Homens", "Mulheres"), 3), freq)
```

```
> Filme <- rep(rep(c("comédia", "romance", "policial"), each = 2),
+     freq)
> tab <- data.frame(Sexo, Filme)
> with(tab, table(Sexo, Filme))
```

```
          Filme
Sexo       comédia policial romance
  Homens       136      248      92
  Mulheres     102       62     195
```

```
> xtable(table(Sexo, Filme), caption = "Preferência por genêro de filme",
+     label = "tab:2-3-8")
```

	comédia	policial	romance
Homens	136	248	92
Mulheres	102	62	195

Table 1: Preferência por genêro de filme

a) Esta probabilidade pode ser obtida conforme segue:

```
> Mulheres.inter.policial <- with(tab, (length(Sexo[Filme == "policial" &
+     Sexo == "Mulheres"])))
> total <- length(tab[, 1])
> Mulheres.inter.policial/total
```

```
[1] 0.0742515
```

b)

```
> n.comédia <- with(tab, (length(Filme[Filme == "comédia"])))
> total <- length(tab[, 1])
> n.comédia/total
```

```
[1] 0.2850299
```

c)

```
> Homens.uniao.comédia <- with(tab, (length(Sexo[Filme == "comédia" |
+     Sexo == "Homens"])))
> total <- length(tab[, 1])
> Homens.uniao.comédia/total
```

```
[1] 0.6922156
```

d)

```
> Homens.inter.policial <- with(tab, (length(Sexo[Filme == "policial" &
+     Sexo == "Homens"])))
> n.Homens <- with(tab, length(Sexo[Sexo == "Homens"]))
> Homens.inter.policial/n.Homens
```

```
[1] 0.5210084
```

Exercício 10

A Figura 2 ilustra a quantidade de assinates em cada empresa.

```
> plot(1:100, 1:100, ty = "n", main = "", xlab = "", ylab = "",
+     axes = F)
> rect(1, 1, 99, 99)
> symbols(50, 32, circles = 27, inches = F, add = T)
> symbols(32, 68, circles = 27, inches = F, add = T)
> symbols(68, 68, circles = 27, inches = F, add = T)
> text(c(10, 90, 72, 50), c(90, 90, 10, 55), c("A", "B", "C", "30"),
+     cex = 0.7)
> text(c(50, 50, 40, 60), c(70, 67, 45, 45), c("420 - 30", "= 390",
+     "120-30 = 90", "180-30=150"), cex = 0.7)
> text(c(25, 75, 50), c(70, 70, 25), c("2100-390-90-30 = 1590",
+     "1850-390-150-30 = 1280", "2600-90-150-30 = 2330"), cex = 0.7)
```

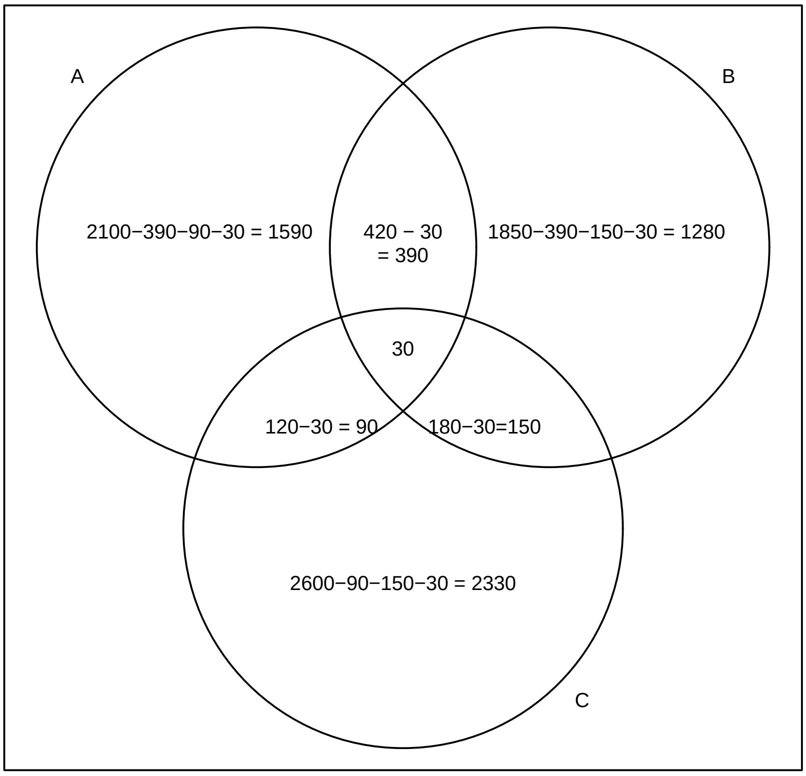

Figure 2: Representação das assinaturas de TV.

a) $P(TA) = \dfrac{1590}{20000} = 0.079$

b) $P(TA \cup TB \cup TC) = \dfrac{1590 + 1280 + 2330 + 90 + 150 + 390 + 30}{20000}$
$= \dfrac{5860}{20000} = 0.293$

c) $P((TA \cup TB \cup TC)^c) = \dfrac{20000 - 5860}{20000} = 0.707$

Exercício 12

A Tabela 2 mostra os percentuais dados pelo exercício.

```
> Civil <- rep(c("casada", "solteira"), c(60, 40))
> Saude <- rep(rep(c("com disturbio", "sem disturbio"), 2), c(30,
+     30, 10, 30))
> x <- table(Saude, Civil)
> prop.table(x)

               Civil
Saude           casada solteira
  com disturbio    0.3      0.1
  sem disturbio    0.3      0.3

> xtable(prop.table(x), caption = "Pacientes de uma Clínica de Ginecologia.",
+     label = "tab:2-3-12")
```

	casada	solteira
com disturbio	0.30	0.10
sem disturbio	0.30	0.30

Table 2: Pacientes de uma Clínica de Ginecologia.

a) Essa probabilidade pode ser observada na tabela, onde encontramos 0.4.

b) $P(solteira|disturbio) = \dfrac{P(solteira \cap disturbio)}{P(disturbio)} = \dfrac{10}{40} = 0.25$

c)

A probabilidade é apresentada na tabela a seguir.

Eventos	Probabilidades
dist. e dist.	0.4 x 0.4 = 0.16
dist. e n.dist.	0.4 x 0.6 = 0.24
n.dist. dist.	0.6 x 0.4 = 0.24
n.dist. e n.dist.	0.6 x 0.6 = 0.36

$0.16 + 0.24 + 0.24 = 0.64$

Exerício 14

$P(A|C) = 0.8$
$P(A|C^c) = 0.9$
$P(C) = 0.1$
$P(C^c) = 0.9$

a) $P(A) = P(A \cap C) + P(A \cap C^c)$
$P(A \cap C) = P(A|C) \cdot P(C) = 0.8 \times 0.1 = 0.08$
$P(A \cap C^c) = P(A|C^c) \cdot P(C^c) = 0.9 \times 0.9 = 0.81$
$P(A) = 0.89$

b) $P(C|A) = \dfrac{P(A \cap C)}{P(A)} = \dfrac{0.08}{0.89} = 0.0899$

Exerício 16

Utilizarei p para representar a prioridade em saúde e educação.

a) $P(direita \cap p1^c) + P(centro \cap p2^c) + P(esquerda \cap p3^c)$
$0.3 \times 0.6 + 0.3 \times 0.4 + 0.4 \times 0.1 = 0.34$

b) $P(direita|p) = \dfrac{P(A \cap P)}{P(p)} = \dfrac{0.12}{0.66} = 0.18$

Exercício 18

Usarei D para detecção do tumor e T para a existência do tumor no paciente.

$P(D \cap T^c) = P(D|T^c) \cdot P(T^c) = 0.1 \times 0.3 = 0.03$
$P(T \cap D) = P(D|T) \cdot P(T) = 0.9 \times 0.7 = 0.63$
$P(T|D) = \dfrac{P(T \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(T \cap D)}{P(D \cap T) + P(D \cap T^c)} = \dfrac{0.63}{0.63 + 0.03} = 0.955$

Exercício 20

Usarei C para cinema e T para teatro.

a) $P(T \cap C^c) = P(T) = \dfrac{1}{3}$

b)

$P(T \cap C^c) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$

c) $P(T \cap C^c) = 0$

d) $P(T \cap C^c) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{8} = 0.208$

e) $P(C^c) = P(T^c \cap C^c) + P(T \cap C^c)$

$\dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8} + P(T \cap C^c)$

$P(T \cap C^c) = 0.125$

Exercício 22

Usarei R para reação e A para alergia.

a) $P(R \cap A) = P(A) \cdot P(R|A) = 0.2 \times 0.5 = 0.1$
$P(R \cap A^c) = P(A^c) \cdot P(R|A^c) = 0.8 \times 0.5 = 0.04$
$P(A^c|R) = \dfrac{P(A^c \cap R)}{P(R)} = fracP(A^c \cap R)P(A^c \cap R) + P(A \cap R) = \dfrac{0.1}{0.1 + 0.04} = 0.714$

b) $P(A|R) = 1 - P(A^c|R) = 0.286$

Exercício 24

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$

b) $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$
$P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$

Exercício 26

Vou chamar as sondas de A, B e C, então construo a Tabela 3 com os eventos e suas probabilidades.

Eventos			Probabilidades
A	B	C	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$
A	B	C^c	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{1000}$
A	B^c	C	$\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{1000}$
A	B^c	C^c	$\frac{1}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{1000}$
A^c	B	C	$\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{1000}$
A^c	B	C^c	$\frac{9}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{1000}$
A^c	B^c	C	$\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{81}{1000}$
A^c	B^c	C^c	$\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{729}{1000}$

Table 3: Probabilidades de encontrar gás na região.

a) Os dados podem ser observados na tabela, vou considerar que a C não encontrou gás.

$$P((A \cap B)|C^c) = \frac{P(A \cap B \cap C^c)}{P(C)^c} = \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{1}{10}} = 0.09$$

b) Vou considerar que a sonda C não encontrou gás.

$$P((A \cup B)|C^c) = \frac{P((A \cup B) \cap C^c)}{P(C)^c}$$
$$= \frac{(P(A) + P(B) - P(A \cap B)) \cdot P(C^c)}{P(C^c)}$$
$$= \frac{\frac{20-1}{100} \cdot \frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 0.19$$

c)

$$\frac{A^c B^c C^c}{AB^c C^c \cup A^c B C^c \cup A^c B^c C \cup A^c B^c C^c} = \frac{243}{725 + 243} = 0.25$$

Exerício 28

Usarei C para congestionamento, B para briga e P para situação de o pai perder a paciência. Este problema em algumas situação me pareceu ter mais de uma interpretação, mas assumo que os valores que o exercício deu são os que vou represenatar abaixo.

$P(C) = 0.6$
$P(B|C) = 0.8$
$P(B|C^c) = 0.4$
$P(P|B) = 0.7$
$P(P|C) = 0.5$
$P(P|C^{\cap} B^c) = 0$

Assim podemos obter a probabilidade de outros eventos:

$P(P) = P(P \cap B) + P(P \cap B^c)$
$P(P) = P(P|B)\dot{P}(B) + P(P|B^c \cap C)\dot{P}(B^c \cap C) + P(P|B^c \cap C^c)\dot{P}(B^c \cap C^c)$
$P(P) = 0.7 \times 0.64 + 0.5 \times 0.2 \times 0.6 + 0 = 0.508$

$P(C \cap P^c) = P(P^c|C)\dot{P}(C) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$
$P(B) = P(B \cap C^c) + P(B \cap C) = 0.16 + 0.48 = 0.64$
$P(P \cap B) = P(P|B)\dot{P}(B) = 0.7 \times 0.64 = 0.448$

a)

$$P(C^c|P^c) = 1 - P(C|P^c) = 1 - \frac{P(C \cap P^c)}{P(P^c)} = 1 - \frac{0.3}{0.498} = 0.3976$$

b)

$$P(B|P) = \frac{P(B \cap P)}{P(P)} = zfrac0.4480.492 = 0.91$$

Exerício 30

```
> areas <- read.xls("areas.xls", head = T)
> head(areas)

  Id Bloco Andar Final Sala Cozinha Banheiro Dorm Rachadura Infiltr
1  1     A     1     1 27.8     7.9      5.0 11.6         0       0
2  2     A     1     2 28.3     7.3      5.4 13.1         0       0
3  3     A     1     3 27.1     7.1      5.0 14.9         0       0
4  4     A     1     4 26.5     8.4      3.9 12.4         1       1
5  5     A     2     1 27.7     7.6      4.7 12.1         0       0
6  6     A     2     2 28.3     7.7      4.6 14.3         0       0
```

a)

```
> with(areas, length(Andar[Andar >= 4 & Andar <= 7])/length(Andar))
```

```
[1] 0.2105263
```

b)

```
> with(areas, length(Bloco[Bloco == "B"])/length(Bloco))
```

```
[1] 0.5
```

c)

```
> with(areas, length(Id[Rachadura == 1 | Infiltr == 1])/length(Id))
```

```
[1] 0.5723684
```

d) Os 3 itens são calculados a seguir, obviamente que a chance de o aparatamento ser no bloco B dado que é do bloco B vai ser 1.

```
> with(areas, length(Andar[Andar >= 4 & Andar <= 7 & Bloco == "B"])/length(Andar[Bloco ==
+     "B"]))
```

```
[1] 0.2105263
```

```
> with(areas, length(Bloco[Bloco == "B"])/length(Bloco[Bloco ==
+     "B"]))
```

```
[1] 1
```

```
> with(areas, length(Id[(Rachadura == 1 | Infiltr == 1) & Bloco ==
+     "B"])/length(Id[Bloco == "B"]))
```

```
[1] 0.5921053
```

Exerício 32

A seguir, carrego os dados e faço os mesmos testes que os apresentados no capitulo 1, supondo que subistituir os dados incoerentes por NA satisfaça a situação.

```
> se <- read.xls("aeusp.xls", head = T)
> head(se)
```

```
  Num    Comun Sexo Idade Ecivil X.Reproce X.Temposp X.Resid Trab Ttrab X.Itrab
1   1 JdRaposo    2     4      4  Nordeste        21       9    3    NA      20
2   2 JdRaposo    2     1      1   Sudeste        24       9    1     1      14
3   3 JdRaposo    2     2      1  Nordeste        31       3    1     1      14
4   4 JdRaposo    1     2      2  Nordeste        10       3    1     4      10
5   5 JdRaposo    2     4      2  Nordeste        31       6    1     1      11
6   6 JdRaposo    2     4      2   Sudeste        24       4    2    NA      15
  X.Renda X.Acompu X.Serief
1       1        2        1
2       2        2        7
3       5        2        7
4       5        2       11
5       6        1        4
6       4        2        4
```

```
> with(se, Sexo[Sexo != 1 & Sexo != 2] <- NA)
> with(se, Idade[Idade < 1 | Idade > 4] <- NA)
> with(se, Ecivil[Ecivil < 1 | Ecivil > 5] <- NA)
> with(se, X.Temposp[X.Temposp[Idade == 1] > 25] <- NA)
> with(se, X.Temposp[X.Temposp[Idade == 2] > 35] <- NA)
> with(se, X.Temposp[X.Temposp[Idade == 3] > 45] <- NA)
> with(se, X.Temposp[X.Temposp[Idade == 4] > Inf] <- NA)
> with(se, Idade[X.Temposp == NA] <- NA)
> with(se, Trab[Trab < 1 | Trab > 3] <- NA)
```

```
> with(se, Ttrab[Ttrab < 1 | Ttrab > 5] <- NA)
> with(se, X.Renda[X.Renda < 1 | X.Renda > 6] <- NA)
> with(se, X.Acompu[X.Acompu < 1 | X.Acompu > 2] <- NA)
> with(se, X.Serief[X.Serief < 1 | X.Serief > 12] <- NA)
```

a)

```
> with(se, length(Idade[Idade == 3 | Idade == 4])/length(Idade[Idade = !NA]))

[1] 0.3948052
```

b)

```
> with(se, length(Sexo[Sexo == 2 & Idade < 3])/length(Idade[Idade <
+     3]))

[1] 0.5536481
```

c)

```
> levels(se$Comun)

[1] "Cohab"    "JddAbril" "JdRaposo" "Sapé"     "V1010"    "VDalva"

> with(se, length(Comun[Comun == "JdRaposo" & X.Acompu == 1])/length(Comun))

[1] 0.03636364
```

d)

```
> with(se, sum(X.Reproce == "Nordeste" & Sexo == 2 & Trab == 1)/length(Num))

[1] 0.1350649

> with(se, sum(X.Reproce == "Nordeste" & Sexo == 2 & Trab == 1 &
+     Ttrab == 1)/sum(X.Reproce == "Nordeste" & Sexo == 2 & Trab ==
+     1))

[1] 0.3076923
```