Cadeias de Markov

1. Introdução

Nestas notas de aula serão tratados modelos de probabilidade para processos que evoluem no tempo de maneira probabilística. Tais processos são denominados **Processos Estocásticos**.

1.2. Processos Estocásticos

Um Processo Estocástico é definido como uma coleção de variáveis randômicas (X(t)) indexadas por um parâmetro t pertencente a um conjunto T. Freqüentemente T é tomado para ser o conjunto dos inteiros não-negativos (porém, outros conjuntos são perfeitamente possíveis) e X(t) representa uma característica mensurável de interesse no tempo t. Exemplificando, X(t) pode representar o nível de estoque de um produto no fim da semana t.

Processos Estocásticos são de interesse para descrever o procedimento de um sistema operando sobre algum período de tempo, com isso, em termos formais, a variável randômica **X(t) representa o estado do sistema no parâmetro (geralmente tempo) t**. Portanto, pode-se afirmar que X(t) é definido em um espaço denominado **Espaço de Estados**.

Os Processos Estocásticos podem ser classificados como:

a) Em relação ao Estado

- Estado Discreto (cadeia): X(t) é definido sobre um conjunto enumerável ou finito.
- Estado Contínuo (seqüência): X(t) caso contrário.

b) Em relação ao Tempo (Parâmetro)

- Tempo Discreto: t é finito ou enumerável.
- Tempo Contínuo: t caso contrário.

Exemplos:

1. Número de usuários em uma fila de banco em um determinado instante: Estado Discreto e Tempo Contínuo.
2. Índice pluviométrico diário: Estado Contínuo e Tempo Discreto.
3. Número de dias chuvosos: Estado Discreto e Tempo Discreto.

Existem vários "tipos" de Processos Estocásticos, porém, nestas notas de aula será apenas abordado um tipo de Processo Estocástico denominado **Processo Markoviano**.

Andrei Andreyevich Markov (*1856, Ryazan, Russia; †1922, São Petersburgo, Russia).

2. Processos Markovianos

Um Processo Estocástico é dito ser um Processo Markoviano se:

$$P\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, ..., X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0\} = P\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k\} \quad (1)$$

para $t_0 \leq t_1 \leq ...t_k \leq t_{k+1} = 0,1,...$ e toda seqüência $k_0, k_1, ..., k_{t-1}, k_t, k_{t+1}$

A expressão (1) pode ser "traduzida" por: a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente $X(t_k) = x_k$, é independente do evento passado e depende somente do estado presente.

Em termos mais resumidos: um Processo Estocástico é dito ser um Processo Markoviano se o estado futuro depende apenas do estado presente e não dos estados passados.

Este tipo de Processo Estocástico é também denominado de *memoryless process* (processo sem memória), uma vez que o passado é "esquecido" (desprezado).

As probabilidades condicionais $P\{X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_k) = x_k\}$ são denominadas **Probabilidades de Transição** e representam, portanto, a probabilidade do estado $X(t_{k+1})$ ser x_{k+1} no instante t_{k+1} dado que o estado $X(t_k)$ é x_k no instante t_k.

Sem demais formalismo, segue-se o exemplo seguinte:

Exemplo A

O estado no ano de 1993 do uso da terra em uma cidade de 50 quilômetros quadrados de área é:

Tabela 1 - Estado do uso da terra em 1993.		
I	uso residencial	30%
II	uso comercial	20%
III	uso industrial	50%

Os valores da tabela 1 podem ser dispostos em um vetor x, denominado **Vetor de Estados**:

$$x = [\mathrm{I} \quad \mathrm{II} \quad \mathrm{III}] \tag{2}$$

As probabilidades de cada Estado (probabilidade não-condicional) podem também ser dispostos em um vetor π, denominado **Vetor de Probabilidade de Estado** (para distingui-las das probabilidades de transição):

$$\pi = [0.30 \quad 0.20 \quad 0.50] \tag{3}$$

Assumindo que as probabilidades de transição para intervalos de 5 anos são dadas pela seguinte tabela:

Tabela 2 - Probabilidades de Transição

	para I	**para II**	**para III**
de I	0.8	0.1	0.1
de II	0.1	0.7	0.2
de III	0	0.1	0.9

As probabilidades condicionais na tabela 2, em termos informais, podem ser entendidas como:

- **de I para I** ⇒ a probabilidade do estado ser I após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é I é 0.8, ou $P\{X(t+5)=\mathrm{I}|X(t)=\mathrm{I}\}=0.8$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=\mathrm{I}|X(1993)=\mathrm{I}\}=0.8$.
- **de I para II** ⇒ a probabilidade do estado ser II após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é I é 0.1, ou $P\{X_{t+5}=\mathrm{II}|X_t=\mathrm{I}\}=0.1$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=\mathrm{II}|X(1993)=\mathrm{I}\}=0.1$.
- **de I para III** ⇒ a probabilidade do estado ser III após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é I é 0.1, ou $P\{X(t+5)=\mathrm{III}|X(t)=\mathrm{I}\}=0.1$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=\mathrm{III}|X(1993)=\mathrm{I}\}=0.1$.
- **de II para I** ⇒ a probabilidade do estado ser I após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é II é 0.1, ou $P\{X(t+5)=\mathrm{I}|X(t)=\mathrm{II}\}=0.1$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=\mathrm{I}|X(1993)=\mathrm{II}\}=0.1$.
- **de II para II** ⇒ a probabilidade do estado ser II após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é II é 0.7, ou $P\{X(t+5)=\mathrm{II}|X(t)=\mathrm{II}\}=0.7$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=\mathrm{II}|X(1993)=\mathrm{II}\}=0.7$.
- o raciocínio é análogo para as demais.

Os valores da tabela 2 podem ser então dispostos em uma matriz P, denominada **Matriz de Transição**:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Assim, a partir de P e o vetor de probabilidade de estado π para 1993, denominado $\pi^{(0)}$, pode-se calcular o vetor de probabilidade de estado π para 1998, denominado $\pi^{(1)}$:

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}P = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 22 & 52 \end{bmatrix} \quad (5)$$

2.1 Cadeias de Markov

Um Processo Markoviano é dito ser uma Cadeia de Markov quando as variáveis randômicas X(t) estão definidas em um espaço de estados discreto E. O exemplo dado acima é então uma Cadeia de Markov porque o espaço de estados é discreto.

Quando o tempo é discreto, a Cadeia de Markov é dita ser uma **Cadeia de Markov em Tempo Discreto**. Neste caso, tem-se:

$$P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k, X(k-1) = x_{k-1}, ..., X(1) = x_1, X(0) = x_0\} = P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k\} \quad (6)$$
$$\forall \quad \text{seqüência} \quad 0,1,...,k-1,k,k+1$$

As Probabilidades de Transição $P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k\}$ representam, portanto, a probabilidade do estado $X(k+1)$ ser x_{k+1} no tempo k + 1 dado que o estado $X(k)$ é x_k no tempo k.

Se para cada x_{k+1} e x_k, tem-se:

$$P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k\} = P\{X(1) = x_1 | X(0) = x_0\} \quad (7)$$
$$\forall \quad \text{seqüência} \quad 1,2,...,k-1,k,k+1$$

então, as Probabilidades de Transição são ditas **Estacionárias**. Assim, tendo-se Probabilidades de Transição Estacionárias implica que as Probabilidades de Transição não mudam em relação ao tempo. Ainda, de acordo com a expressão (7), as Probabilidades de Transição são denominadas **Probabilidades de Transição de Passo 1**.

A existência de Probabilidades de Transição Estacionárias de Passo 1 implica que para cada x_{k+n} e x_k e n (n = 0, 1, 2,...), tem-se:

$$P\{X(k+n) = x_{k+n} | X(k) = x_k\} = P\{X(n) = x_n | X(0) = x_0\} \quad (8)$$
$$\forall \quad \text{seqüência} \quad 1,2,...,k-1,k,k+1$$

Estas probabilidades condicionais são chamadas **Probabilidades de Transição de Passo n**.

Para simplificação da notação, adotando x_{k+1} ou x_{k+n} de j e x_k de i, pode-se definir:

$$p_{ij} = P\{X(k+1) = j | X(k) = i\} \tag{9}$$

e

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X(k+n) = j | X(k) = i\} \tag{10}$$

Porque $p_{ij}^{(n)}$ são probabilidades condicionais, estas precisam ser não negativas e desde que o processo precisa realizar uma transição em algum estado, estas precisam satisfazer as seguintes propriedades:

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0 \qquad \forall \quad (i, j); n = 0,1,2,... \tag{11}$$

e

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij}^{(n)} = 1 \qquad \forall \quad i; n = 0,1,2,... \tag{12}$$

Uma maneira conveniente de mostrar todas as Probabilidades de Transição de Passo n é:

Estado	**0**	**1**	**. . .**	**M**
0	$p_{00}^{(n)}$	$p_{01}^{(n)}$	. . .	$p_{0M}^{(n)}$
1	$p_{10}^{(n)}$	$p_{11}^{(n)}$	. . .	$p_{1M}^{(n)}$
.	.	.	. . .	.
M	$p_{M0}^{(n)}$	$p_{M1}^{(n)}$	. . .	$p_{MM}^{(n)}$

ou, equivalentemente, por uma matriz $P^{(n)}$:

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \cdots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \cdots & p_{1M}^{(n)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \cdots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix} \tag{13}$$

A matriz $P^{(n)}$ é denominada **Matriz de Transição de Passo n**. Quando n = 1, a matriz é denominada apenas **Matriz de Transição**, como exemplificado na expressão (4).

As Cadeias de Markov, consideradas nestas notas de aula possuem as seguintes propriedades:

1. Um número finito de estados.
2. Probabilidades de Transição Estacionárias.

Ainda será assumido como conhecido o vetor de probabilidade de estado inicial $\pi^{(0)}$ (vetor composto por P{X0 = i} para todo i).

Exemplo B

Uma loja de câmeras fotográficas armazena um modelo de câmera que pode ser comprada semanalmente do fornecedor. $D_1, D_2, \ldots$, representa a demanda para esta câmera (o número de unidades que deveriam ser vendidas se o estoque não é esgotado) durante a semana 1, semana 2, . . ., respectivamente. É assumido que D_i são variáveis randômicas independentes e identicamente distribuídas (i.i.d*) tendo uma distribuição de Poisson com média igual a 1. Dado X_0 representar o número de câmeras inicialmente, X_1 o número de câmeras no fim da semana 1, X_2 o número de câmeras no fim da semana 2 e assim por diante. Assume-se que $X_0 = 3$. No sábado a noite a loja faz o pedido de câmeras para o fornecedor, o qual realizará a entrega apenas na próxima segunda-feira. A loja utiliza a seguinte política de compra: se não há câmeras no estoque, a loja compra 3 câmeras. Entretanto, se há alguma câmera no estoque, nenhuma câmera é comprada. Vendas são perdidas quando a demanda excede o estoque. Assim, $\{X_t\}$ para t = 0, 1, 2, . . . é um Processo Estocástico. Os Estados possíveis do processo são os inteiros 0, 1, 2, 3, representando o número de câmeras no fim da semana t, ou seja, o espaço de estados, para este exemplo é $E = \{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\}$. As variáveis randômicas X_t são dependentes e podem ser avaliadas iterativamente pela expressão:

$$X_{t+1} = \begin{cases} \max\{3 - D_{t+1}, 0\} & \text{se } X_t = 0 \\ \max\{X_t - D_{t+1}, 0\} & \text{se } X_t \geq 1 \end{cases} \quad \text{para } t = 0, 1, 2, \ldots \tag{14}$$

A expressão (14) é o processo estocástico (o qual foi modelado a partir do enunciado). Ainda faz-se necessário definir a matriz de transição P, porém, primeiramente, a título de revisão segue:

* Duas variáveis aleatórias são independentes se $P(A \cap B) = P(A|B).P(B) = P(A).P(B)$.

Duas variáveis aleatórias são identicamente distribuídas se possuem a mesma distribuição de probabilidade.

Distribuição de Poisson

Siméon Denis Poisson (*1781 Pithiviers, França; †1840, Sceaux, França).

A distribuição de Poisson é uma distribuição discreta empregada em situações probabilísticas onde a área de oportunidade de ocorrência de um evento é grande, mas a oportunidade de ocorrência em um intervalo particular (ou em um ponto) é muito pequena.
Exemplo:

- Número de defeitos ao longo de um fio de uma linha de transmissão de energia.
- Erros de datilografia em um livro.
- Acidentes industriais.
- Chegadas em modelos de fila de espera.

Matematicamente:

A probabilidade de exatamente r ocorrências de um evento é:

$$P(r) = \frac{(\lambda)^r e^{-\lambda}}{r!} \tag{15}$$

onde:

λ é a média da distribuição

A variância de P(r) é λ também.

Exemplo:

O número médio de defeitos em laminas de vidro é 5. A probabilidade que a lamina tenha 6 defeitos é:

$$P(6) = \frac{(5)^6 e^{-5}}{6!} = 0.146 \tag{16}$$

Retomando o exemplo do estoque da loja de câmeras, dado que o estado corrente X_t= i, o processo só depende de D_{t+1} (veja expressão (14)). Uma vez que X_{t+1} é independente do passado, este processo é um processo Markoviano. Considerando ainda que o espaço de estado é discreto, este processo Markoviano é uma Cadeia de Markov.

Uma vez que D_{t+1} tem distribuição de Poisson com média λ = 1 pode-se calcular:

$$P\{D_{t+1} = n\} = \frac{1^n e^{-1}}{n!}\text{, para n = 0, 1,...} \tag{17}$$

Atribuindo valores para n, onde n representa o número de câmeras necessárias para repor o estoque na próxima semana, fica:

$$P\{D_{t+1} = 0\} = e^{-1} = 0.368 \tag{18}$$

$$P\{D_{t+1} = 1\} = e^{-1} = 0.368 \tag{19}$$

$$P\{D_{t+1} = 2\} = \frac{e^{-1}}{2} = 0.184 \tag{20}$$

$$P\{D_{t+1} \geq 3\} = 1 - P\{D_{t+1} \leq 2\} = 1 - 0.368 - 0.368 - 0.184 = 0.08 \tag{21}$$

De posse das probabilidades de D_{t+1} para os valores de n e do processo estocástico (expressão 14), as probabilidades de transição p_{ij} (elementos da matriz de transição) podem ser definidas:

<u>p_{00}</u>

$$X_t = 0 \text{ e } X_{t+1} = 0 \;\Rightarrow 0 = \max(3 - D_{t+1}, 0)$$
$$\therefore P(D_{t+1} \geq 3) = 0.080 \tag{22}$$

<u>p_{01}</u>

$$X_t = 0 \text{ e } X_{t+1} = 1 \;\Rightarrow 1 = \max(3 - D_{t+1}, 0)$$
$$\therefore P(D_{t+1} = 2) = 0.184 \tag{23}$$

<u>p_{10}</u>

$$X_t = 1 \text{ e } X_{t+1} = 0 \;\Rightarrow 0 = \max(1 - D_{t+1}, 0)$$
$$\therefore P(D_{t+1} \geq 1) = 1 - P(D_{t+1} = 0) = 0.632 \tag{24}$$

<u>p_{12}</u>

$$X_t = 1 \text{ e } X_{t+1} = 2 \;\Rightarrow 2 = \max(1 - D_{t+1}, 0)$$
$$\therefore P(D_{t+1} = -1) = 0 \tag{25}$$

Para as demais $p_{ij,}$ o raciocínio é análogo.

A matriz de transição P então fica:

$$P = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Uma maneira alternativa para representar as probabilidades de transição é utilizar uma representação denominada **Diagrama de Transição de Estado**. Neste os sentidos das flechas indicam a probabilidade de transição de um estado i para um estado j. Para a matriz de transição P dada pela expressão (26) o diagrama fica:

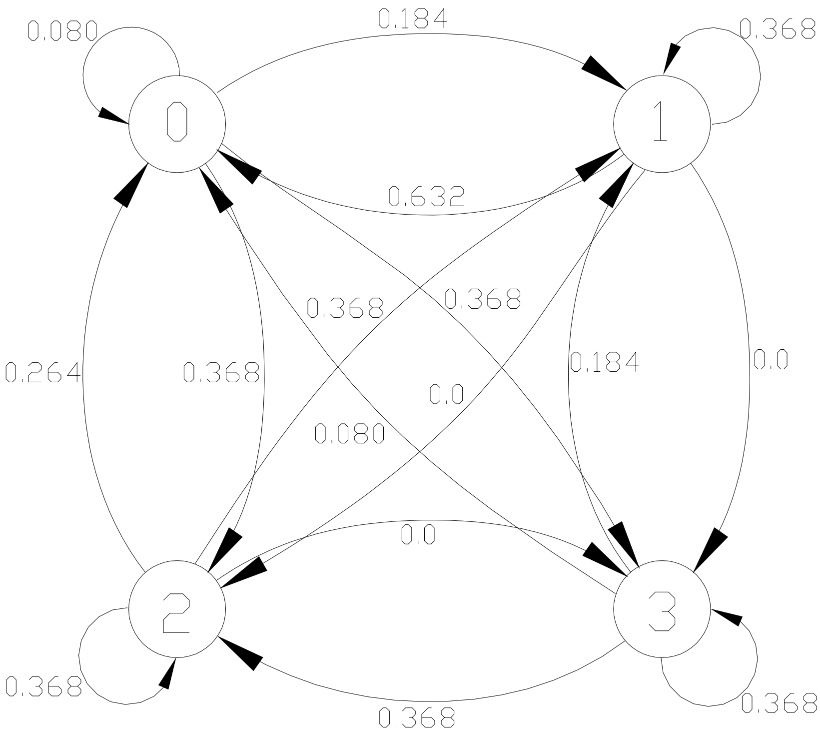


Fig. 1 - Diagrama de Transição de Estado.

2.2 Equações de Chapman - Kolmogorov

Sidney Chapman* (*1888, Eccles, Inglaterra; †1970, Boulder, Estados Unidos).

Andrey Nikolaevich Kolmogorov (*1903, Tambov, Russia; †1987, Moscow, Russia).

A matriz de transição P é a matriz de transição de probabilidades de estado para um passo no tempo, ou seja, de t para t+1. Pode se dizer, de maneira simplista, que as equações de Chapman-Kolmogorov fornecem um método para computar a matriz de transição para n passos no tempo, ou seja, de t para t+1, de t para t+2, ..., de t para t+n.

Seja $p_{ij}^{(n)}$ a probabilidade de transição do estado i para o estado j no tempo n, pode-se escrever que:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{m} p_{kj}^{n-m} \tag{27}$$

$\forall \quad i = 0,1,\ldots,M$
$\forall \quad j = 0,1,\ldots,M$
e qualquer m = 1, 2, ..., n-1
e qualquer n = m+1, m+2, ...

Em notação matricial, a expressão (27) fica:

$$P^{(n)} = P^{m}.P^{n-m} \tag{28}$$

* Não é certeza que Sidney Chapman é o "Chapman" das equações de Chapman-Kolmogorov

onde:

$P^{(n)}$ é a matriz de transição no passo n.

A partir de (28) pode-se concluir, portanto, que:

$$P^{(n)} = P^{n} \tag{29}$$

A expressão (29) afirma que a matriz de transição no passo n é igual à matriz de transição no passo 0 (inicial) elevada a n-ésima potência.

Cabe ressaltar neste momento que a expressão (29) só é válida para Cadeias de Markov cujas **probabilidades de transição de estados são constantes em relação ao tempo (Probabilidades de Transição Estacionárias)**. A este tipo de Cadeia de Markov, denomina-se **Cadeia de Markov Homogênea** e a matriz de transição P é então uma matriz homogênea.

Retomando o exemplo do estoque da loja de câmeras, a matriz de transição para passo 2 (n = 2), é:

$$P^{(2)} = P^{2} = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix} \tag{30}$$

O vetor probabilidade de estado π para o exemplo da câmera no tempo 0 é:

$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{31}$$

uma vez que $X_0 = 3$.

Para o tempo 1, $\pi^{(1)}$ pode ser calculado como:

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}.P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Para o tempo 2, $\pi^{(2)}$ pode ser calculado como:

$$\pi^{(2)} = \pi^{(0)}.P^{2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix} \tag{33}$$

2.3 Classificação de Estados em Cadeias de Markov

2.3.1 Estados Alcançáveis e Comunicantes

Um estado j é dito ser **alcançável** (*accessible*) a partir de um estado i se $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 0$. Isto implica que é possível o sistema entrar no estado j eventualmente quando este começa no estado i.

<u>Exemplo 1</u>: os estados da matriz de transição $P^{(2)}$ na expressão (30).

<u>Exemplo 2</u>: Um jogador tem um \$1,00 e a cada vez que joga ganha \$1,00 com probabilidade p>0 ou perde \$1,00 com probabilidade 1-p. O jogo termina quando o jogador acumula \$3,00 ou \$0,00. Este jogo é uma Cadeia de Markov cujos estados representam a quantia esperada de dinheiro que o jogador possui a cada vez que joga. O espaço de estados é $E = \{0 \quad 1 \quad 2 \quad 3\}$ e a matriz de transição P é dada por:

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{34}$$

Nesta Cadeia de Markov, o estado 2, por exemplo, não é alcançável a partir do estado 3. Isto pode ser observado a partir do contexto, uma vez que se o jogador alcançar o estado 3, este nunca deixará este estado, o que implica que $p_{32}^{(n)} = 0$ para todo $n \geq 0$. Entretanto, o estado 3 é alcançável a partir do estado 2, uma vez que $p_{23}^{(1)} > 0$.

Um estado j é dito **comunicante** com o estado i se o estado j é alcançável a partir do estado i e o estado i é alcançável a partir do estado j.

<u>Exemplo 3</u>: os estados da matriz de transição $P^{(2)}$ na expressão (30).
<u>Exemplo 4</u>: estados 2 e 3 do exemplo 2 não são comunicantes.

A seguinte regra pode ser definida a partir das Equações de Chapman-Kolmogorov: "Se um estado i é comunicante com um estado k e o estado k é comunicante com um estado j, então o estado i é comunicante com o estado j".

Se dois estados se comunicam entre si, diz-se que eles pertencem à mesma classe.

Se todos os estados são comunicantes, portanto todos os estados pertencem a uma única classe, a Cadeia de Markov é dita ser **Irredutível**.

<u>Exemplo 5</u>: A Cadeia de Markov do exemplo do estoque da loja de câmeras.

2.3.2 Estados Recorrentes e Transientes

Um estado é dito ser **Transiente** (Temporário, Efêmero, Transitório) se, entrando neste estado, o processo pode nunca retornar novamente para este estado. Portanto, o estado i é transiente se e somente se existe um estado j $(j \neq i)$ que é alcançável a partir do estado i mas não vice-versa, isto é, o estado i não é alcançável a partir do estado j. Assim, se o estado i é transiente e o processo visita este estado, há uma probabilidade positiva que o processo irá mover-se para o estado j e assim nunca irá retornar para o estado i. Conseqüentemente, um estado transiente será visitado somente um número finito de vezes.

Um estado é dito ser **Recorrente** se entrando neste estado, o processo definitivamente irá retornar para este estado. Portanto, um estado é recorrente, se e somente se, não é transiente. Uma vez que o estado recorrente será "revisitado" após cada visita (não necessariamente no próximo passo do processo), este será visitado infinitamente para o processo em tempo infinito.

Um estado é dito ser **Absorvente** se entrando neste estado, o processo nunca irá deixar este estado. Portanto, um estado i é absorvente se e somente se $p_{ii} = 1$. Com isso, pode-se afirmar que um estado absorvente é um caso especial de um estado recorrente.

Em uma Cadeia de Markov, um conjunto C de estados é dito ser um **Conjunto Fechado** se o processo ao entrar em um desses estados de C, este irá permanecer nos estados de C indefinidamente, ou seja, C é um conjunto tal que nenhum estado fora de C é alcançável a partir de qualquer estado de C. Com isso, pode-se afirmar que C é um conjunto formado por estados recorrentes.

Em uma Cadeia de Markov, um conjunto C_m de estados é dito ser um **Conjunto Fechado Mínimo** se este conjunto não possui sub-conjuntos fechados.

Exemplo 6: Suponha que a Cadeia de Markov possui a seguinte matriz de transição P:

$$
\begin{array}{cc}
\text{Estado} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{35}
$$

O estado 3 é transiente porque se o processo está no estado 3, há uma probabilidade positiva que ele nunca irá retornar para este estado. O estado 4 também é um estado transiente porque se o processo começa neste estado, imediatamente o processo o deixa e nunca mais irá retornar para este estado.

Os estados 0 e 1 são recorrentes. Através de P percebe que se o processo começar a partir de um desses dois estados, este nunca deixará estes dois estados. Além disto, sempre quando o processo move-se a partir de um destes estados para o outro, este irá retornar para o estado original eventualmente.

O estado 2 é um estado absorvente, pois, uma vez que o processo entra no estado 2, este nunca mais o deixará.

Os estados 0, 1 e 2 formam um conjunto fechado C, uma vez que se o processo entrar em um destes estados, nunca os deixará.

Os estados 0 e 1 formam um conjunto fechado mínimo, bem como o estado 2.

2.3.3 Propriedades de Periodicidade

Um estado i é periódico com período t se um retorno a este estado é possível somente em t, 2t, 3t,... passos para t>1 e t é o maior inteiro com esta propriedade (máximo divisor comum). Isto implica que $p_{ii}^{(n)} = 0$ sempre quando n não é divisível por t.

Exemplo 7: o estado 1 do exemplo 2. Começando no estado 1, é possível para o processo entrar no estado 1 somente nos tempos 2, 4, 6,..., de tal forma que o estado 1 possui período t = 2. Isto pode ser verificado calculando $p_{11}^{(n)}$ para todo n e observar que $p_{11}^{(n)} = 0$ para n impar.

Exemplo 8: os estados da seguinte Matriz de Transição:

$$
\begin{array}{cc}
\text{Estado} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
\quad (36)
$$

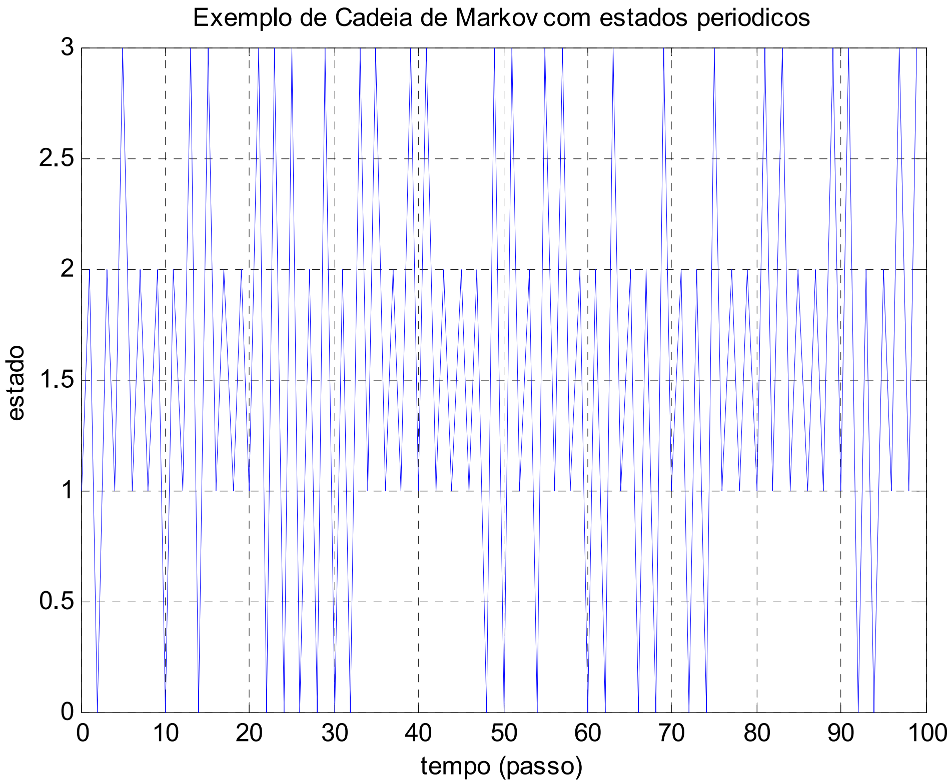


Figura 2 - Cadeia de Markov com estados periódicos.

Se há dois números consecutivos s e s + 1 tal que o processo pode estar no estado i nos tempos s e s + 1, o estado é dito ter período 1 e é chamado estado **Aperiódico**.

Como a recorrência é uma classe de propriedade, a periodicidade também é uma classe de propriedade. Assim, se um estado i em uma classe tem período t, todos os estados nesta classe têm período t.

Exemplo 9: o estado 2 do exemplo 2 possui período t = 2 porque está na mesma classe que o estado 1, o qual, por sua vez, tem período t = 2.

Em uma Cadeia de Markov de estado finito, estados recorrentes que são aperiódicos são chamados de estados **Ergódicos**. Uma Cadeia de Markov é dita ser **Ergódica** se todos os estados são estados ergódicos.

Resumo

Tabela 3 - Resumo de classificações de Estados e Cadeias.

Conjunto Fechado	Nenhum estado, a não ser algum pertencente ao conjunto, pode ser alcançado de qualquer estado pertencente ao conjunto.
Estado Absorvente	Uma vez que se entra neste estado, nunca mais o deixa.
Estado Recorrente	Uma vez que se entra neste estado, um eventual retorno é assegurado.
Estado Periódico	O estado que pode somente ser alcançado nos passos m, 2m, 3m, . . ., onde m é um inteiro > 1.
Estado Transiente	Um eventual retorno ao estado não está assegurado.
Estado Ergódico	Uma vez que se entrou neste estado, um retorno ao estado é assegurado dentro de um número finito de passos, porém o estado não é periódico e pode voltar antes de qualquer passo n.
Cadeia Irredutível	Cada estado pode ser alcançado a partir de qualquer outro estado (todos os estados são comunicantes).
Cadeia Absorvente	A Cadeia contém um ou mais conjuntos fechados e o processo poderá eventualmente ser absorvido em um dos conjuntos fechados.
Cadeia Ergódica	Todos os estados são recorrentes e aperiódicos.

2.4 Propriedades de Longo Período em Cadeias de Markov

2.4.1 Probabilidades de Estados Estavéis (*Steady-State*)

A matriz de transição $P^{(n)}$ do exemplo do estoque da loja de câmeras é para:

n = 1

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} \quad (37)$$

n = 2

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix} \quad (38)$$

n = 4

$$P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \\ 0.282 & 0.285 & 0.268 & 0.166 \\ 0.284 & 0.283 & 0.263 & 0.171 \\ 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \end{bmatrix} \quad (39)$$

n = 8

$$P^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Como se pode perceber, todas as linhas da matriz $P^{(8)}$ são aproximadamente iguais (no caso, são iguais apenas devido ao truncamento na $3^{\underline{0}}$ casa decimal), e serão absolutamente iguais para $n \to \infty$. Se todas as linhas da matriz de transição são iguais, o processo torna-se independente da distribuição de probabilidade inicial, a qual é representada pelo vetor de probabilidade de estado π_0.

No caso do estoque da loja de câmeras, isto implica que a longo período, o estado do estoque é independente do estado inicial $X_0 = 3$.

A figura abaixo mostra o vetor de probabilidade de estado em função do tempo para $\pi^{(0)} = [1\ 0\ 0\ 0]$ ($X_0 = 0$), $\pi^{(0)} = [0\ 1\ 0\ 0]$ ($X_0 = 1$), $\pi^{(0)} = [0\ 0\ 1\ 0]$ ($X_0 = 2$), $\pi^{(0)} = [0\ 0\ 0\ 1]$ ($X_0 = 3$). Nota-se que independente do estado inicial do estoque da loja de câmeras, a distribuição de probabilidade dos estados $\pi^{(7)}$ é praticamente a mesma nos gráficos abaixo.

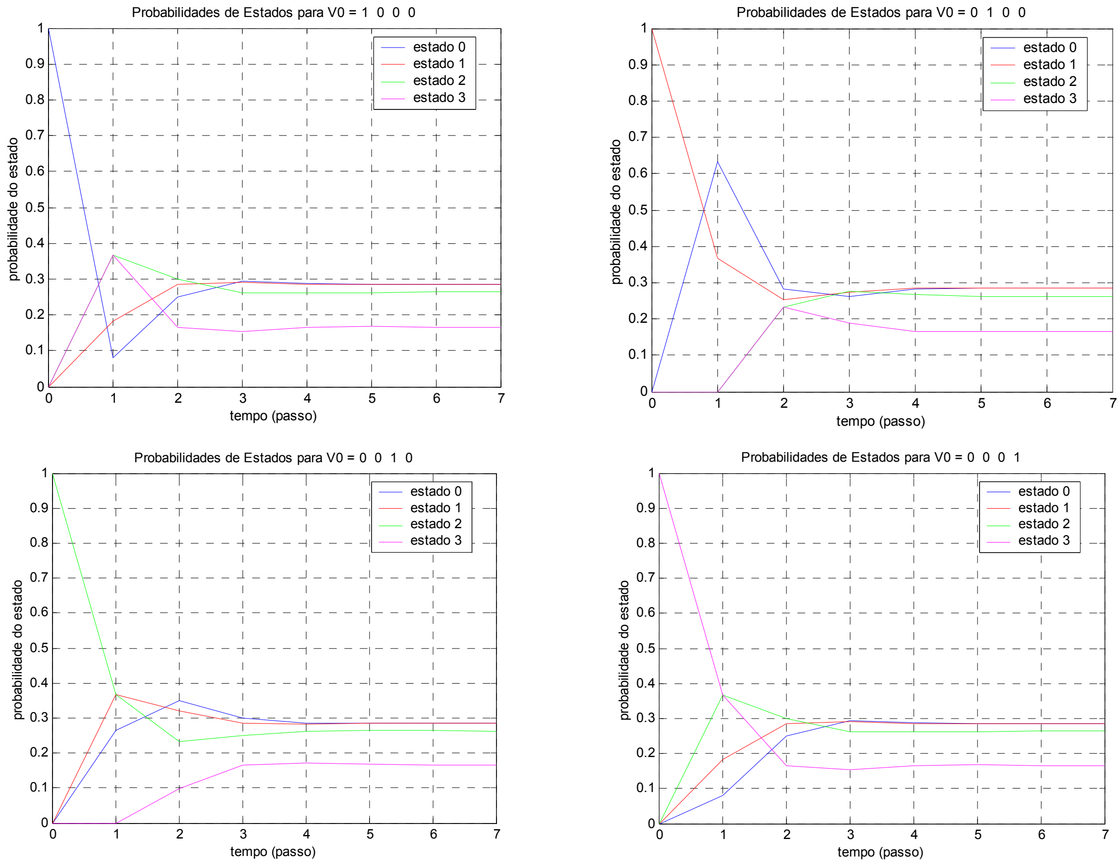


Fig. 3 - Vetor de Probabilidade $\pi^{(n)}$ para o passo n dado $\pi^{(0)}$.

A matriz de transição irá estabilizar os valores de seus elementos a longo período se a Cadeia de Markov é Ergódica e Irredutível*, que por sua vez, implica na existência de $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ independente de i. Além disto:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0 \tag{41}$$

onde os π_j satisfazem unicamente as seguintes equações de estados estáveis:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij} \qquad \text{para} \qquad j = 0,1,2,\ldots,M \tag{42}$$

e

* O $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ pode também existir mesmo para Cadeias Não Irredutíveis e/ou Não Ergódicas (ver Tabela 4).

$$\sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1 \qquad \text{para} \quad j = 0,1,2,\ldots,M \tag{43}$$

Os π_j são chamados de **Probabilidades de Estados-Estáveis** da Cadeia de Markov e podem ser denominados também como **Probabilidades de Estados Estacionários** (não confundir com probabilidades de transição estacionárias), **Probabilidades de Estados em Fase de Regime**, **Distribuição Estacionária**, **Probabilidades de Equilíbrio**, **Valores Limites** ou **Probabilidades de Estado Fixo**.

Nota-se que as expressões (42) e (43) formam um sistema com M + 2 equações em M + 1 incógnitas. Com isso, no mínimo uma equação precisa ser redundante e pode, portanto, ser excluída do sistema. No entanto, a equação da expressão (43) é a única que não pode ser excluída devido ao seu caráter de normalização no sistema.

Retomando o exemplo do estoque da loja de câmeras, o sistema fica:

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20} + \pi_3 p_{30} \\ \pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \pi_3 p_{31} \\ \pi_2 = \pi_0 p_{02} + \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} + \pi_3 p_{32} \\ \pi_3 = \pi_0 p_{03} + \pi_1 p_{13} + \pi_2 p_{23} + \pi_3 p_{33} \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} \tag{44}$$

Igualando a zero as quatro primeiras equações do sistema da expressão (44), fica:

$$\begin{cases} 0 = \pi_0 (p_{00} - 1) + \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20} + \pi_3 p_{30} \\ 0 = \pi_0 p_{01} + \pi_1 (p_{11} - 1) + \pi_2 p_{21} + \pi_3 p_{31} \\ 0 = \pi_0 p_{02} + \pi_1 p_{12} + \pi_2 (p_{22} - 1) + \pi_3 p_{32} \\ 0 = \pi_0 p_{03} + \pi_1 p_{13} + \pi_2 p_{23} + \pi_3 (p_{33} - 1) \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} \tag{45}$$

Substituindo valores, fica:

$$\begin{cases} 0 = \pi_0 (0.080 - 1) + \pi_1 0.632 + \pi_2 0.264 + \pi_3 0.080 \\ 0 = \pi_0 0.184 + \pi_1 (0.368 - 1) + \pi_2 0.368 + \pi_3 0.184 \\ 0 = \pi_0 0.368 + \pi_2 (0.368 - 1) + \pi_3 0.368 \\ 0 = \pi_0 0.368 + \pi_3 (0.368 - 1) \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} \tag{46}$$

Excluindo uma equação qualquer (sem ser a última) e resolvendo o sistema, a solução é:

$$\pi = [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] = [0.286 \quad 0.285 \quad 0.263 \quad 0.166] \tag{47}$$

A partir de (47), pode-se afirmar que a matriz de transição $P^{(\infty)}$ para o passo $n = \infty$ é:

$$P^{(\infty)} = \begin{bmatrix} \pi^{(\infty)} \\ \pi^{(\infty)} \\ \pi^{(\infty)} \\ \pi^{(\infty)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \\ \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \end{bmatrix} \tag{48}$$

Em particular, se i e j são estados recorrentes pertencentes a diferentes classes, então:

$$p_{ij}^{(n)} = 0, \forall \quad n \tag{49}$$

Similarmente, se j é um estado transiente, então:

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \forall \quad i \tag{50}$$

<u>Observação Importante1</u>: como já citado, cabe neste momento ressaltar que $P^{(n)}$ só pode ser obtida como na expressão (48) somente se a Cadeia de Markov é Ergódica Irredutível, o que garante que todas as linhas de $P^{(n)}$ são idênticas.

No entanto, o método de se elevar a matriz de transição P a n-ésima potência para se determinar $P^{(n)}$ é sempre válido, apesar de não haver necessidade que todas as linhas de $P^{(n)}$ sejam idênticas mesmo para $n \to \infty$. O seguinte exemplo deixa claro esta ressalva.

<u>Exemplo</u>: Uma Cadeia de Markov possui a seguinte matriz de transição $P^{(1)}$:

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{51}$$

Qual o valor de $\lim_{n \to \infty} P^{(n)}$? Elevando P a potências mais altas, tem-se:

$$P^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.45 & 0.30 & 0.25 \end{bmatrix} \tag{52}$$

$$P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.525 & 0.350 & 0.125 \end{bmatrix} \tag{53}$$

$$P^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5625 & 0.3750 & 0.0625 \end{bmatrix} \tag{54}$$

:
:

$$P^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

Escrevendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 + \pi_2 0.3 \\ \pi_1 = \pi_1 + \pi_2 0.2 \\ \pi_2 = \pi_2 0.5 \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 \end{cases} \tag{56}$$

A solução de (56) resulta em:

$$\pi_0 + \pi_1 = 1 \text{ e } \pi_2 = 0 \tag{57}$$

e conseqüentemente não existe uma solução determinada para π_0 e π_1. Como se pode notar, as linhas de $P^{(\infty)}$ não são iguais e, por isso, os valores de π_0 e π_1 não são determinados unicamente. Este fato ocorreu devido a esta Cadeia de Markov não ser Irredutível.

Observação Importante2: Se P é uma matriz de transição em que:

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1 \quad \forall \quad i = 1,2,\dots,M \tag{58}$$

e

$$\sum_{i=1}^{M} p_{ij} = 1 \quad \forall \quad j = 1,2,\dots,M \tag{59}$$

esta matriz é dita ser uma matriz **Duplamente Estocástica** e neste caso, para P irredutível*, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{M} \quad \forall \quad i, j = 1,2,\dots,M \tag{60}$$

Considerações matemáticas:

A equação vetorial em (42), pode ser dada em notação reduzida por:

* $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é duplamente estocástica, mas $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \neq \frac{1}{3} \quad \forall \quad i, j = 1,2,3$ porque P não é Irredutível.

$$\pi = \pi P \tag{61}$$

sendo:

π um vetor linha; e
P é uma matriz quadrada.

Equivalentemente, a expressão (61) pode ser escrita por:

$$P^t \pi^t = \pi^t \tag{62}$$

sendo:

t o operador transposto.

A expressão (62) pode ser entendida como um problema de auto-valor*, que implica em P^t ter um auto-valor igual a 1.

O problema de auto-valor fica então:

$$\left(P^t - \lambda I\right)\pi^t = 0; \tag{63}$$

A resolução de (63) irá fornecer um auto-vetor π^t associado a um auto-valor igual a 1 que corresponde para o vetor de Probabilidades de Estados Estáveis. Uma vez que P é uma matriz homogênea, o auto-vetor π^t poderá ter infinitas soluções, porém tais soluções diferem entre si apenas por um fator de escala. Faz-se necessário então normalizar os valores do vetor π^t para sua soma ser igual a 1.

O exemplo abaixo resolve o problema de auto-valor para a matriz de transição P do exemplo do estoque da loja de câmeras:

$$\left(\begin{bmatrix} 0.080 & 0.632 & 0.264 & 0.080 \\ 0.184 & 0.368 & 0.368 & 0.184 \\ 0.368 & 0 & 0.368 & 0.368 \\ 0.368 & 0 & 0 & 0.368 \end{bmatrix} - \lambda . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) . \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

A solução é:

---

* $Ax = \lambda x \Rightarrow \left(A - \lambda I\right)x = 0$

sendo:

λ um auto-valor;
x um auto-vetor associado ao auto-valor λ; e
I a matriz identidade.

$$\text{AutoValor} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.092 + 0.2434i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.092 - 0.2434i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{65}$$

$$\text{AutoVetor} = \begin{bmatrix} 0.5606 & -0.4523 + 0.3989i & -0.4523 - 0.3989i & -0.7071 \\ 0.5590 & -0.3015 & -0.3015 & 0 \\ 0.5165 & 0.1508 - 0.3989i & 0.1508 + 0.3989i & 0 \\ 0.3264 & 0.6030 & 0.6030 & 0.7071 \end{bmatrix} \tag{66}$$

O auto-vetor associado ao auto-valor = 1 é:

$$\pi^t = \begin{bmatrix} 0.5606 \\ 0.5590 \\ 0.5165 \\ 0.3264 \end{bmatrix} \tag{67}$$

Que por sua vez, normalizado para a soma dos seus elementos ser igual a 1 é:

$$\pi^t = \frac{1}{1.9625} \begin{bmatrix} 0.5606 \\ 0.5590 \\ 0.5165 \\ 0.3264 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2856 \\ 0.2848 \\ 0.2631 \\ 0.1663 \end{bmatrix} \tag{68}$$

Os valores em (68) correspondem para os mesmos valores encontrados em (40) e (47).

Considerando a Matriz de Transição da Cadeia de Markov Não Irredutível e Não Ergódica dada em (51), o problema de auto-valor fica:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} - \lambda . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) . \begin{bmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \\ \pi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{69}$$

A solução é:

$$\text{AutoValor} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} \tag{70}$$

$$\text{AutoVetor} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.4867 \\ 0 & 1 & -0.3244 \\ 0 & 0 & 0.8111 \end{bmatrix} \tag{71}$$

Neste caso, existe 2 auto-valores iguais a 1, devido a existência de dois conjuntos fechados mínimos (2 estados absorventes), e não apenas um auto-valor igual a 1. Neste caso, o vetor π^t não pode ser unicamente determinado (como em (55) e (57)).

2.5 Custo Médio Esperado por Unidade de Tempo

Na seção anterior, abordou-se o caso em que os estados são ergódicos (recorrentes e aperiódicos). Se a condição de aperiodicidade é relaxada, então o limite $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ pode não existir.

Exemplo: a seguinte matriz de transição P

$$P = \begin{array}{c|cc} \text{Estado} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \tag{72}$$

Se o processo começa no estado 0 no tempo 0, o processo retornará ao estado 0 nos tempos 2, 4, 6,... e entrará no estado 1 nos tempos 1, 3, 5,... Portanto, $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$ não existe. No entanto, o seguinte limite sempre irá existir para uma Cadeia de Markov Irredutível (estado finito):

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\right) = \pi_j, \forall \quad i \tag{73}$$

A expressão 73 (não confundir a expressão 73 com $\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)}$) é de suma importância para calcular o **Custo Médio a Longo Período por Unidade de Tempo** associado à Cadeia de Markov.

Supondo que um custo seja determinado apenas em função do estado da Cadeia de Markov, ou seja, $C(X_t)$ é a função de custo. Nota-se que esta função é uma variável randômica que assume os valores C(0), C(1),..., C(M), onde E = [0, 1,..., M] é o espaço de estados do processo e que $C(\bullet)$ é, portanto, independente de t. O custo médio esperado para os n primeiros períodos é dado por:

$$\overline{C} = E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right] \tag{74}$$

Através de (73), pode-se demonstrar que o **Custo Médio por Unidade de Tempo** associado à Cadeia de Markov é dado por:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right] = \sum_{j=0}^{M} \pi_j C(j) \tag{75}$$

Exemplo: a função de custo para o exemplo do estoque da loja de câmeras é dada por:

$$C(X_t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad X_t = 0 \\ 2 & \text{se} \quad X_t = 1 \\ 8 & \text{se} \quad X_t = 2 \\ 18 & \text{se} \quad X_t = 3 \end{cases} \tag{76}$$

Aplicando os valores de (76) em (75), fica:

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right] = 0.286(0) + 0.285(2) + 0.263(8) + 0.166(18) = 5.662 \tag{77}$$

O valor da expressão (77) é o custo médio esperado do estoque por semana. Outro resultado interessante é obtido para a seguinte função de custo:

$$C(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad X_t = j \\ 0 & \text{se} \quad X_t \neq j \end{cases} \tag{78}$$

Aplicando os valores de (78) em (75), o resultado são os próprios π_j. Com isso, os valores de π_j podem ser interpretados com a **fração do tempo em que o processo está no estado j**.

A tabela 4 mostra um resumo das condições para obter π^{∞} em função da classificação da cadeia.

Tabela 4 - Condições para π^{∞} em função da classificação da cadeia.

	Ergódica	Não ergódica	
	todos os estados são recorrentes e aperiódicos	existe ao menos um estado transiente	existe ao menos um estado periódico
Irredutível todos os estados são comunicantes	π^{∞} independe de π^{0} $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \forall i$ Exemplo: $P = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix}$ $\pi^{\infty} = [0.286 \quad 0.285 \quad 0.263 \quad 0.166]$	a existência de ao menos um estado transiente implica em haver estados que não são comunicantes. Portanto, não existe cadeia irredutível com um ou mais estados transientes.	π^{∞} independe de π^{0} $\notin \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ π^{∞} é obtido através de: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\right) = \pi_j, \forall \ i$ Exemplo: $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\pi^{\infty} = [0.5 \quad 0.5]$, mas $\notin \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$
Não Irredutível ao menos um estado não é comunicante com ao menos algum outro estado	π^{∞} depende de π^{0} $\in \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ mas $\neq \pi_j, \quad \forall i$ Exemplo: $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ Cadeia ergódica, mas estados 0 e 1 não são comunicantes com estados 2 e 3.	<u>Caso 1</u>: π^{∞} depende de π^{0} $\in \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ mas $\neq \pi_j, \quad \forall i$ Exemplo: $P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$ Estado 2 é transiente e não é comunicante com estados 0,1, 3 e 4. <u>Caso2</u>: π^{∞} independe de π^{0} $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad \forall i$ Exemplo: $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$ Estado 0 não é comunicante com demais e estados 1, 2 e 3 são transientes.	π^{∞} depende de π^{0} $\notin \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ Exemplo: $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ Estados 0, 1 e 2 possuem período T=3 e estados 3 e 4 possuem período T=2. Estados 0, 1 e 2 não são comunicantes com estados 3 e 4.

2.6 Custo Médio Esperado por Unidade de Tempo para Funções de Custo Complexas

Na seção anterior, tratou-se apenas com funções de custo dependentes do estado em que o sistema se encontra no tempo t. Para funções de custo que dependem não só do estado do sistema, mas também de outra variável randômica, faz necessário fazer algumas ressalvas. Considerando que:

1) $\{X_t\}$ é uma Cadeia de Markov Irredutível (estado-finito).

2) Existe uma seqüência de variáveis randômicas $\{D_t\}$, independentes e identicamente distribuídas (i.i.d) associada à $\{X_t\}$.
3) Para cada $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ fixo é ocorrido um custo $C(X_t, D_{t+m})$ no tempo t, para t = 0,1, 2, . . .
4) A seqüência $X_0, X_1, \ldots, X_t$ precisa ser independente de D_{t+m}.

Se as quatro condições dadas acima são satisfeitas, então:

$$\lim_{n \to \infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, D_{t+m})\right] = \sum_{j=0}^{M} K(j).\pi_j \tag{79}$$

onde:

$$K(j) = E[C(j), D_{t+m}] \tag{80}$$

K(j) é o valor esperado condicional calculado de acordo com a distribuição de probabilidade das variáveis randômicas D_t, dado o estado j. Além disto:

$$\lim_{n \to \infty}\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t, D_{t+m})\right] = \sum_{j=0}^{M} K(j).\pi_j \tag{81}$$

para essencialmente todos os caminhos do processo.

2.7 Tempos de Primeira Passagem

O Tempo de Primeira Passagem pode ser entendido como o tempo demandado para o processo atingir o estado j a partir do estado i. Quando j = i, o Tempo de Primeira Passagem é simplesmente o número de passos (transições) para o processo retornar ao estado inicial i. Neste caso, denomina-se **Tempo de Recorrência** para o estado i.

Retomando o exemplo do estoque da loja de câmeras, o estado do estoque para as seis primeiras semanas é:

$X_0 = 3$ $\quad$ $X_1 = 2$ $\quad$ $X_2 = 1$ $\quad$ $X_3 = 0$ $\quad$ $X_4 = 3$ $\quad$ $X_5 = 1$

Neste caso, o Tempo de Primeira Passagem a partir do estado 3 para o estado 1 é 2 semanas, o Tempo de Primeira Passagem a partir do estado 3 para o estado 0 é 3 semanas e o Tempo de Recorrência para o estado 3 é 4 semanas.

Em geral, o Tempo de Primeira Passagem é uma variável randômica cuja distribuição de probabilidade associada depende das probabilidades de transição do processo.

Denominando $f_{ij}^{(n)}$ **a probabilidade do Tempo de Primeira Passagem a partir do estado i para o estado j ser n**, pode-se escrever que:

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij} \tag{82}$$

$$f_{ij}^{(2)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(1)} \tag{83}$$

:

:

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} \tag{84}$$

Assim, o Tempo de Primeira Passagem a partir do estado i para o estado j em n passos pode ser computado recursivamente.

Exemplo: Probabilidade do Tempo de Primeira Passagem para o estoque da loja de câmeras a partir do estado 3 (estoque cheio) para o estado 0 (estoque vazio) ser n:

$$f_{30}^{(1)} = p_{30} = 0.080 \tag{85}$$

$$f_{30}^{(2)} = p_{31} f_{10}^{(1)} + p_{32} f_{20}^{(1)} + p_{33} f_{30}^{(1)} = 0.184(0.632) + 0.368(0.264) + 0.368(0.080) = 0.243 \tag{86}$$

:

:

Para dado i e j, tem-se que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \leq 1 \tag{87}$$

Se $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1$ implica que processo inicialmente no estado i, pode nunca alcançar o estado j. Quando $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$, $f_{ij}^{(n)}$ pode ser considerado como a distribuição de probabilidade para a variável randômica Tempo de Primeira Passagem.

O **Tempo de Primeira Passagem Esperado** μ_{ij} pode ser definido por:

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{se } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & \text{se } \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \end{cases} \tag{88}$$

Sempre quando $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$, μ_{ij} unicamente satisfaz a equação:

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj} \tag{89}$$

Exemplo: Tempo de Primeira Passagem Esperado para o estoque da loja de câmeras a partir do estado 3 (estoque cheio) para o estado 0 (estoque vazio):

$$\mu_{30} = 1 + p_{31}\mu_{10} + p_{32}\mu_{20} + p_{33}\mu_{30} \tag{90}$$
$$\mu_{20} = 1 + p_{21}\mu_{10} + p_{22}\mu_{20} + p_{23}\mu_{30}$$
$$\mu_{10} = 1 + p_{11}\mu_{10} + p_{12}\mu_{20} + p_{13}\mu_{30}$$

Substituindo valores, fica:

$$\mu_{30} = 1 + 0.184\mu_{10} + 0.368\mu_{20} + 0.368\mu_{30} \tag{91}$$
$$\mu_{20} = 1 + 0.368\mu_{10} + 0.368\mu_{20}$$
$$\mu_{10} = 1 + 0.368\mu_{10}$$

Resolvendo (91), fica:

$$\mu_{10} = 1.58\,\text{semanas} \tag{92}$$
$$\mu_{20} = 2.51\,\text{semanas}$$
$$\mu_{30} = 3.50\,\text{semanas}$$

Assim, o tempo esperado para o estoque ficar vazio, a partir de estar cheio é de 3.50 semanas.

Quando i = j, μ_{jj} é o **Tempo de Recorrência Esperado** para o estado j. De posse das probabilidades de estado estáveis π_j, o Tempo Esperado de Recorrência pode ser calculado como:

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j} \qquad \text{para} \quad j = 0,1,\ldots,M \tag{93}$$

<u>Exemplo</u>: Tempo de Recorrência Esperado para o estoque da loja de câmeras.

$$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = 3.50\,\text{semanas} \tag{94}$$

$$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = 3.51\,\text{semanas} \tag{95}$$

$$\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = 3.80\,\text{semanas} \tag{96}$$

$$\mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = 6.02\,\text{semanas} \tag{97}$$

Os estados em uma Cadeia de Markov podem ser classificados, de maneira análoga a classificação na seção 2.3, em função do Tempo de Primeira Passagem, como:

- Um estado é **Transiente** se $\sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1$, que implica que $\mu_{jj} = \infty$.

- Um estado é **Recorrente** se $\sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1$.
- Um estado recorrente é **Nulo** se $\mu_{jj} = \infty$ e **Não-Nulo ou Positivo** se $\mu_{jj} < \infty$.
- Um estado é **Ergódico** se é não-nulo e aperiódico.

Considerações matemáticas:

Uma analogia interessante que pode ser feita com a expressão (93) é:

$$T = \frac{1}{f} \tag{98}$$

onde:

T é período;
f é freqüência.

A interpretação da expressão (93) como a expressão (98) é possível porque μ_{jj} é o **período** (tempo) esperado de recorrência. Com isso pode-se concluir que as probabilidades de estados estáveis π_j podem ser entendidas também como **freqüências** dadas em ciclos/unidade de tempo.

A unidade de tempo no caso de Cadeia de Markov em tempo discreto é **passo**, assim a freqüência esperada de recorrência dos estados é dada em **ciclos/passo**.

Uma vez que o menor período de recorrência para um estado é 1 (devido a consideração de tempo discreto), a maior freqüência possível é 1 ciclo/passo.

Exemplo: uma Cadeia de Markov originou o seguinte vetor de distribuição de probabilidades a longo período:

$$\pi = [\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3] = [0.5 \quad 0.3 \quad 0.2 \quad 0.0] \tag{99}$$

π_0 possui uma freqüência esperada de recorrência igual a 0.5 ciclo/passo e conseqüentemente, um período esperado de recorrência $\mu_{00} = 2$ passos.

π_1 possui uma freqüência esperada de recorrência igual a 0.3 ciclo/passo e conseqüentemente, um período esperado de recorrência $\mu_{11} = 3.3333...$ passos.

π_2 possui uma freqüência esperada de recorrência igual a 0.2 ciclo/passo e conseqüentemente, um período esperado de recorrência $\mu_{22} = 5$ passos.

π_3 possui uma freqüência esperada de recorrência igual a 0.0 ciclo/passo e conseqüentemente, um período esperado de recorrência $\mu_{33} = \infty$ passos.

Observação: a unidade Hertz (Hz) corresponde a ciclos/segundo, sendo adequado seu uso apenas quando um passo na Cadeia de Markov corresponde a um segundo.

2.8 Estados Absorventes

Como já visto na seção 2.3.2, um estado k é dito ser **absorvente** se a probabilidade de transição p_{kk} = 1. Desta maneira, uma vez que o processo visita o estado k, este irá permanecer neste estado indefinidamente. Se k é um estado absorvente e o processo inicia no estado i, a probabilidade de **sempre** ir para o estado k é denominada de **probabilidade de absorção** para o estado k dado que o sistema iniciou no estado i, denotada por f_{ik}.

Quando há dois ou mais estados absorventes em uma Cadeia de Markov, é óbvio que o processo será absorvido para um destes estados e, portanto, é desejável encontrar estas probabilidades de absorção.

Seja k um estado absorvente, então o conjunto de probabilidades de absorção f_{ik} satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$f_{ik} = \sum_{j=0}^{M} p_{ij} f_{jk} \quad \text{para} \quad i = 0,1,\ldots,M \tag{100}$$

sujeito as condições:

$$f_{kk} = 1 \tag{101}$$
$f_{ik} = 0$ se i é um estado recorrente e $i \neq k$

Exemplo: Considere a seguinte matriz de transição P:

$$P = \begin{array}{c c} \text{Estado} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{102}$$

A matriz de transição acima P é um exemplo de matriz de transição de uma Cadeia de Markov específica denominada ***Random Walk*** (caminhada randômica). Este processo estocástico possui a propriedade que o processo estando no estado i, na próxima transição o processo estará em um dos dois estados imediatamente adjacentes ao estado i (com exceção dos estados 0 e 4, obviamente).

Dada a matriz P acima, verifica-se facilmente que existem dois estados absorventes: 0 e 4. Os demais estados são todos transientes. Pode-se determinar, por exemplo, qual a probabilidade de absorção para o estado 0 a partir do estado 2, denominada f_{20}? Para isto, através da expressão (100), pode-se escrever que:

$$f_{20} = p_{20}f_{00} + p_{21}f_{10} + p_{22}f_{20} + p_{23}f_{30} + p_{24}f_{40} \tag{103}$$

Através da expressão (101) verifica-se que f_{00} = 1 e f_{40} = 0, uma vez que o estado 4 é um estado absorvente, que por sua vez é um caso específico de estado recorrente. Devido a estas verificações a expressão (103) degenera-se em:

$$f_{20} = p_{20} + p_{21} f_{10} + p_{22} f_{20} + p_{23} f_{30} \tag{104}$$

Nota-se em (104) que se tem uma equação e três incógnitas (f_{10}, f_{20}, f_{30}). Porém, pode-se escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} f_{10} = p_{10} f_{00} + p_{11} f_{10} + p_{12} f_{20} + p_{13} f_{30} + p_{14} f_{40} \\ f_{20} = p_{20} f_{00} + p_{21} f_{10} + p_{22} f_{20} + p_{23} f_{30} + p_{24} f_{40} \\ f_{30} = p_{30} f_{00} + p_{31} f_{10} + p_{32} f_{20} + p_{33} f_{30} + p_{34} f_{40} \end{cases} \tag{105}$$

Atribuindo valores para $f_{00} = 1$ e $f_{40} = 0$, como em (104), o sistema fica:

$$\begin{cases} f_{10} = p_{10} + p_{11} f_{10} + p_{12} f_{20} + p_{13} f_{30} \\ f_{20} = p_{20} + p_{21} f_{10} + p_{22} f_{20} + p_{23} f_{30} \\ f_{30} = p_{30} + p_{31} f_{10} + p_{32} f_{20} + p_{33} f_{30} \end{cases} \tag{106}$$

Tem-se então um sistema com três equações e três incógnitas. Resolvendo este sistema, obtém-se o valor de $f_{20} = \frac{4}{5}$, ou seja, a probabilidade do processo estagnar no estado 0 a partir do estado 2. Conseqüentemente, a probabilidade do processo estagnar no estado 4 a partir do estado 2 é $f_{24} = \frac{1}{5}$. Tais probabilidades também podem ser verificadas elevando a matriz P a valores de potência grandes (com um alto custo computacional).

Para este exemplo, calculou-se P^{10000} e verificou-se, por indução que $P^{(\infty)}$ é:

$$P^{(\infty)} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 14/15 & 0 & 0 & 0 & 1/15 \\ 4/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 \\ 8/15 & 0 & 0 & 0 & 7/15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{107}$$

Os valores nesta matriz indicam as probabilidades de absorção para os estados 0 e 4.

2.9 Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

Este item não será abordado nestas notas de aula.

FONTE: Hiller & Lieberman, CAP. 16

Exercícios - Cadeias de Markov

qualquer erro, favor enviar e-mail para fernando.nogueira@ufjf.edu.br

1) A Distribuição de Poisson dada abaixo representa um processo estocástico?

$$P_t(r) = \frac{(\lambda t)^r e^{-\lambda t}}{r!}$$

2) Explique as equações de Chapman-Kolmogorov. Qual a sua importância?

3) Explique porque $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ pode ser <1 ? Qual a classificação do estado i se $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$?

4) Seja P uma matriz de transição dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

Qual é $P^{(\infty)}$?

5) A matriz de transição abaixo pertence a uma Cadeia de Markov que representa o processo de um cliente que comprou uma das 4 marcas possíveis de cerveja (0, 1, 2, 3) no instante n e irá comprar cada uma das marcas no instante n + 1 sob a condição que realmente em cada etapa de transição ele irá comprar o produto.

$$P = \begin{bmatrix} 0.8033 & 0 & 0.1844 & 0.0123 \\ 0.1412 & 0.7547 & 0 & 0.1041 \\ 0 & 0.2535 & 0.7397 & 0.0068 \\ 0.2080 & 0.1232 & 0 & 0.6688 \end{bmatrix}$$

a) O que significa $P_{31}^{(16)}$? Qual o seu valor?

b) Quais as Probabilidades de Estado-Estável da Cadeia de Markov dada? Quais interpretações são possíveis sobre tais probabilidades?

6) Seja P uma matriz de transição dada por:

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcule $f_{20}^{(5)}$, μ_{02} e μ_{12}

7) Classifique os estados das Cadeias de Markov abaixo, de acordo com as suas respectivas Matrizes de Transição.

a)

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

b)

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

c)

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

8) O setor de vendas de *Whisky* de uma loja vendeu 600.000 caixas no trimestre passado. Existem no mercado as firmas X, Y, Z e Outras que venderam respectivamente 240.000, 180.000, 120.000 e 60.000 caixas. A empresa Z resolve lançar uma nova marca de *Whisky* com um preço aproximadamente igual ao dos concorrentes acompanhada de uma forte divulgação que irá custar L milhões de \$ e que irá produzir a seguinte matriz de transição para um período de 3 meses.

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ X \\ Y \\ Z \\ \text{Outras} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X & Y & Z & \text{Outras} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 & 0.05 & 0.05 \\ 0.02 & 0.03 & 0.9 & 0.05 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Se o aumento de 1% na participação no mercado representa um lucro líquido de k milhões de \$ por período, qual deve ser o valor de k em função de L para justificar esse lançamento e divulgação se essa matriz de transição vale para um ano? Faça a análise apenas para esses 4 períodos trimestrais.

9) Uma máquina de uma linha de produção pode assumir os seguintes estados:

Estado	Condição
0	operação normal (máxima produção)
1	operação com baixa perda de produção
2	operação com alta perda de produção
3	inoperante

Através de dados históricos, a matriz de transição (mês a mês) para esta maquina é:

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Estado} \quad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

De acordo com o estado da máquina, algumas decisões podem ser tomadas com respectivos custos: Substituir a máquina por uma outra nova demanda 1 semana para ser realizada esta operação e a produção é perdida neste período a um custo de $2.000,00 e o custo da máquina nova é $4.000,00. Quando a máquina opera no estado 1, há um custo de $1.000,00 e quando a máquina opera no estado 2, há um custo de $3.000,00, ambos devido à produção de itens defeituosos. Realizar manutenção na máquina não é viável quando esta se encontra no estado 3. A manutenção não melhora em nada a capacidade de operação da máquina quando esta se encontra nos estados 0 e 1. A manutenção da máquina faz com que esta retorne ao estado 1, quando esta está operando no estado 2 a um custo de $2.000,00 e a produção é perdida por 1 semana. Não é permitido manter a máquina no estado 3.

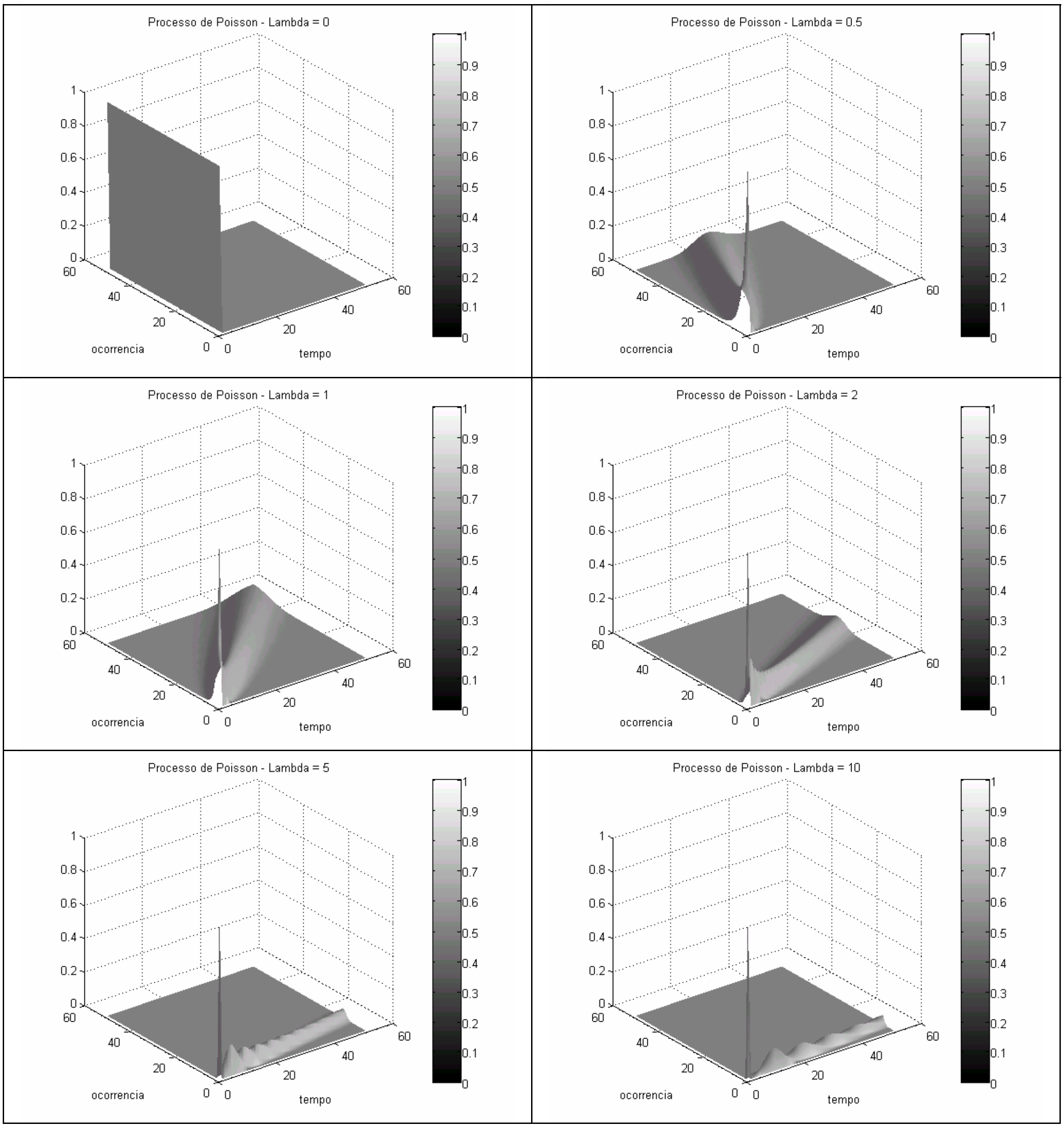
Qual a política ótima de manutenção desta máquina ? Utilize o método de enumeração exaustiva.

Obs: a resolução deste exercício exige os conceitos tratados em Processos Markovianos de Decisão (não consta nestas notas de aula).

10) Formule o exercício 9 como um problema de Programação Linear

Respostas

1) Sim, porque $P_t(r)$ representa uma coleção de variáveis randômicas indexadas por um parâmetro t, dentre outros.



2) De acordo com o texto.

3) Se existe a probabilidade do estado i nunca alcançar o estado j, então $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1$. Neste caso, $f_{ij}^{(n)}$ não pode ser tido como a distribuição de probabilidade para a variável randômica Tempo de Primeira Passagem. Se $\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$ o estado i é transiente.

4) Uma vez que P é uma matriz duplamente estocástica, então:

$$P^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

5.a) $P_{31}^{(16)} = 0.3057$ é a probabilidade de um consumidor sendo comprador da marca 3 ser comprador da marca 1 após 16 passos.

5.b) $\pi = [0.3398 \quad 0.3058 \quad 0.2407 \quad 0.1137]$

π_j é a probabilidade de encontrar o processo no estado j a longo período.

Pode também ser interpretada como a fração do tempo em que o processo permanece no estado j.

6) $f_{20}^{(5)} = 0.03515625$

$$\begin{cases} \mu_{02} = 1 + p_{00}\mu_{02} + p_{01}\mu_{12} \\ \mu_{12} = 1 + p_{10}\mu_{02} + p_{11}\mu_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_{02} = 1 + 0.5\mu_{02} + 0.5\mu_{12} \\ \mu_{12} = 1 + 0.5\mu_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_{02} = 4 \\ \mu_{12} = 2 \end{cases}$$

7.a) Todos estados Ergódicos

7.b) Todos os estados são recorrentes, periódicos (período m = 3) e não-nulos.

7.c) Todos os estados são comunicantes e a cadeia é irredutível. Processo periódico com período m = 3.

8)

$$\pi^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{240000}{600000} & \frac{180000}{600000} & \frac{120000}{600000} & \frac{60000}{600000} \end{bmatrix} = [0.4 \quad 0.3 \quad 0.2 \quad 0.1]$$

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}P = [0.334 \quad 0.306 \quad 0.255 \quad 0.105]$$
$$\pi^{(2)} = \pi^{(1)}P = [0.2905 \quad 0.3069 \quad 0.2992 \quad 0.1034]$$
$$\pi^{(3)} = \pi^{(2)}P = [0.2607 \quad 0.3042 \quad 0.3344 \quad 0.1007]$$
$$\pi^{(4)} = \pi^{(3)}P = [0.2397 \quad 0.2996 \quad 0.3624 \quad 0.0983]$$

O aumento de vendas de *Whisky* da marca Z para estes 4 trimestres é:

$$\Delta\pi_Z^{(1)} = 0.255 - 0.2 = 0.055 \Rightarrow 5.5\%$$
$$\Delta\pi_Z^{(2)} = 0.2992 - 0.2 = 0.0992 \Rightarrow 9.92\%$$
$$\Delta\pi_Z^{(3)} = 0.3344 - 0.2 = 0.1344 \Rightarrow 13.44\%$$
$$\Delta\pi_Z^{(4)} = 0.3624 - 0.2 = 0.1624 \Rightarrow 16.24\%$$

$$0.055 + 0.0992 + 0.1344 + 0.1624 = 0.4510$$

Se 1% resulta em lucro por trimestre de k milhões de \$, então tem-se para o ano todo um acréscimo no lucro de 45.1k milhões de \$.

Conclusão

- Se 45.1k - L > 0 o lançamento deve ser feito.
- Se 45.1k - L < 0 o lançamento não deve ser feito.
- Se 45.1k = L indiferença

9)

Decisão	Ação	Estados	Custo Esperado devido Produção de itens com defeito	Custo manutenção	Custo de perda da produção	Custo total por semana
1	Não fazer nada	0	0,00	0,00	0,00	0,00
		1	1.000,00	0,00	0,00	1.000,00
		2	3.000,00	0,00	0,00	3.000,00
2	Manutenção	2	0,00	2.000,00	2.000,00	4.000,00
3	Substituir	1	0,00	4.000,00	2.000,00	6.000,00
		2	0,00	4.000,00	2.000,00	6.000,00
		3	0,00	4.000,00	2.000,00	6.000,00

Política	Descrição Verbal	$d_0(R)$	$d_1(R)$	$d_2(R)$	$d_3(R)$
R_a	substituir no estado 3	1	1	1	3
R_b	substituir no estado 3, manutenção no estado 2	1	1	2	3
R_c	substituir no estado 2 e 3	1	1	3	3
R_d	substituir no estado 1, 2 e 3	1	3	3	3

R_a

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

R_b

$$P = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

R_c

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
P = \begin{bmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 0 & 3/4 & 1/8 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

<u>R_d</u>

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
P = \begin{bmatrix} 0 & 7/8 & 1/16 & 1/16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Decisão / **Estado**	**C_{jk} (em milhares de \$)**		
	1	**2**	**3**
0	0	-	-
1	1	-	6
2	3	4	6
3	-	-	6

Política	**Probabilidades de Estado-Estável** $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$	**E[C] (em milhares de \$)**
R_a	$\left(\frac{2}{13}, \frac{7}{13}, \frac{2}{13}, \frac{2}{13}\right)$	$\frac{1}{3}[2(0)+7(1)+2(3)+2(6)] = \frac{25}{13} = \$1.923,00$
R_b	$\left(\frac{2}{21}, \frac{5}{7}, \frac{2}{21}, \frac{2}{21}\right)$	$\frac{1}{21}[2(0)+15(1)+2(4)+2(6)] = \frac{35}{21} = \$1.667,00$
R_c	$\left(\frac{2}{11}, \frac{7}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11}\right)$	$\frac{1}{11}[2(0)+7(1)+1(6)+1(6)] = \frac{19}{11} = \$1.727,00$
R_d	$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{32}\right)$	$\frac{1}{32}[16(0)+14(6)+1(6)+1(6)] = \frac{96}{32} = \$3.000,00$

Com isso, a política ótima é R_b que é: substituir no estado 3, manutenção no estado 2.

10)

Minimize $\quad Z = 1.000y_{11} + 6.000y_{13} + 3.000y_{21} + 4.000y_{22} + 6.000y_{23} + 6.000y_{33}$

Sujeito a :

$$\begin{cases} y_{01} + y_{11} + y_{13} + y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{33} = 1 \\ y_{01} - \left(y_{13} + y_{23} + y_{33}\right) = 0 \\ y_{11} + y_{13} - \left(\frac{7}{8}y_{01} + \frac{3}{4}y_{11} + y_{22}\right) = 0 \\ y_{21} + y_{22} + y_{23} - \left(\frac{1}{16}y_{01} + \frac{1}{8}y_{11} + \frac{1}{2}y_{21}\right) = 0 \\ y_{33} - \left(\frac{1}{16}y_{01} + \frac{1}{8}y_{11} + \frac{1}{2}y_{21}\right) = 0 \\ y_{ik} \geq 0 \end{cases}$$