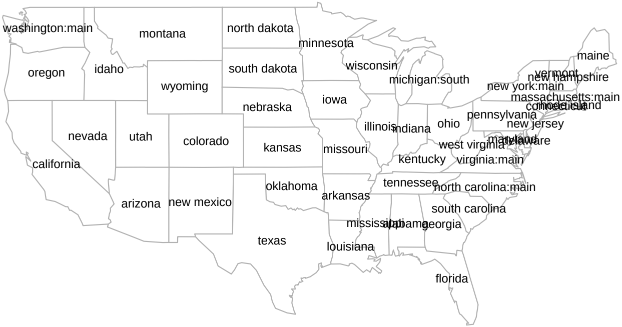
Outro olhar minucioso na estrutura de covariância de modelos espaciais

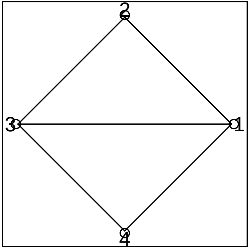
Renato Martins Assunção
Elias Teixeira Krainski
Guido del Piño

14 de março de 2007

Variação espacial discreta

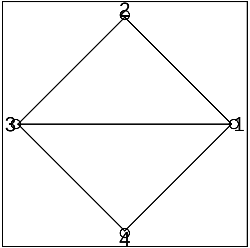


Mapa de 48 estados dos EUA



- Matriz de adjacência A

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$



- Matriz de adjacência A

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}$$

- Matriz ponderada W: Linhas somam 1 e não é simétrica

$$\begin{matrix} 0.00 & 0.33 & 0.33 & 0.33 \\ 0.50 & 0.00 & 0.50 & 0.00 \\ 0.33 & 0.33 & 0.00 & 0.33 \\ 0.50 & 0.00 & 0.50 & 0.00 \end{matrix}$$

- Suponha o vetor aleatório $\underline{Y}$

- Suponha o vetor aleatório $\underline{Y}$
  - y_i é o valor observado na área i

- Suponha o vetor aleatório $\underline{Y}$
  - y_i é o valor observado na área i
- Média do vetor é $\underline{\mu} = (0, ..., 0)'$

- Suponha o vetor aleatório $\underline{Y}$
  - y_i é o valor observado na área i
- Média do vetor é $\underline{\mu} = (0, ..., 0)'$
  - O interesse é modelar a estrutura de correlação espacial

- Suponha o vetor aleatório $\underline{Y}$
  - y_i é o valor observado na área i
- Média do vetor é $\underline{\mu} = (0, ..., 0)'$
  - O interesse é modelar a estrutura de correlação espacial
- Σ é a matriz de covariância

- Suponha o vetor aleatório $\underline{Y}$
  - y_i é o valor observado na área i
- Média do vetor é $\underline{\mu} = (0, ..., 0)'$
  - O interesse é modelar a estrutura de correlação espacial
- Σ é a matriz de covariância
- O que é Σ?

Dois modelos para Σ

Dois modelos para Σ

- Modelo **SAR**

Dois modelos para Σ

- Modelo **SAR**
  - **A**uto**R**egressivo: valor da área i depende de seus vizinhos

Dois modelos para Σ

- Modelo **SAR**
  - **A**uto**R**egressivo: valor da área i depende de seus vizinhos
  - **S**imultâneo: sistema de n equações simultâneas

Dois modelos para Σ

- Modelo **SAR**
  - **A**uto**R**egressivo: valor da área i depende de seus vizinhos
  - **S**imultâneo: sistema de n equações simultâneas
- Modelo **CAR**

Dois modelos para Σ

- Modelo **SAR**
  - **A**uto**R**egressivo: valor da área i depende de seus vizinhos
  - **S**imultâneo: sistema de n equações simultâneas
- Modelo **CAR**
  - **A**uto**R**egressivo: como antes

Dois modelos para Σ

- Modelo **SAR**
  - **A**uto**R**egressivo: valor da área i depende de seus vizinhos
  - **S**imultâneo: sistema de n equações simultâneas
- Modelo **CAR**
  - **A**uto**R**egressivo: como antes
  - **C**ondicional: sistema de n distibuições condicionais

Especificações

- O modelo SAR

$$\left\{ \begin{array}{lcr} z_1 & = & \rho_s \sum_{j \; viz \; 1} w_{ij} z_j + \epsilon_1 \\ z_2 & = & \rho_s \sum_{j \; viz \; 2} w_{ij} z_j + \epsilon_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ z_n & = & \rho_s \sum_{j \; viz \; n} w_{ij} z_j + \epsilon_n \end{array} \right. \tag{1}$$

Especificações

- O modelo SAR

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z_1 & = & \rho_s \sum_{j \ viz \ 1} w_{ij} z_j + \epsilon_1 \\ z_2 & = & \rho_s \sum_{j \ viz \ 2} w_{ij} z_j + \epsilon_2 \\ \vdots & = & \vdots \\ z_n & = & \rho_s \sum_{j \ viz \ n} w_{ij} z_j + \epsilon_n \end{array} \right. \tag{1}$$

- O modelo SAR

$$\left\{ \begin{array}{ccc} z_1 | viz \ de \ 1 & \sim & N(\rho_c \sum_{j \ viz \ 1} w_{ij} z_j, \kappa_1^2) \\ z_2 | viz \ de \ 2 & \sim & N(\rho_c \sum_{j \ viz \ 2} w_{ij} z_j, \kappa_2^2) \\ \vdots & = & \vdots \\ z_n | viz \ de \ n & \sim & N(\rho_c \sum_{j \ viz \ n} w_{ij} z_j, \kappa_n^2) \end{array} \right. \tag{2}$$

- Forma matricial

- Forma matricial
  - Modelo **SAR**:

$$Z_{n\times 1} = \rho_s W_{n\times n} Z + \epsilon \ , \tag{3}$$

onde $\epsilon_i \sim N(0, \tau_i^2)$

- Forma matricial
  - Modelo **SAR**:
    $$Z_{n \times 1} = \rho_s W_{n \times n} Z + \epsilon \ , \tag{3}$$
    onde $\epsilon_i \sim N(0, \tau_i^2)$
  - Modelo **CAR**: Não tem

- Forma matricial
  - Modelo **SAR**:

$$Z_{n\times 1} = \rho_s W_{n\times n} Z + \epsilon \ , \tag{3}$$

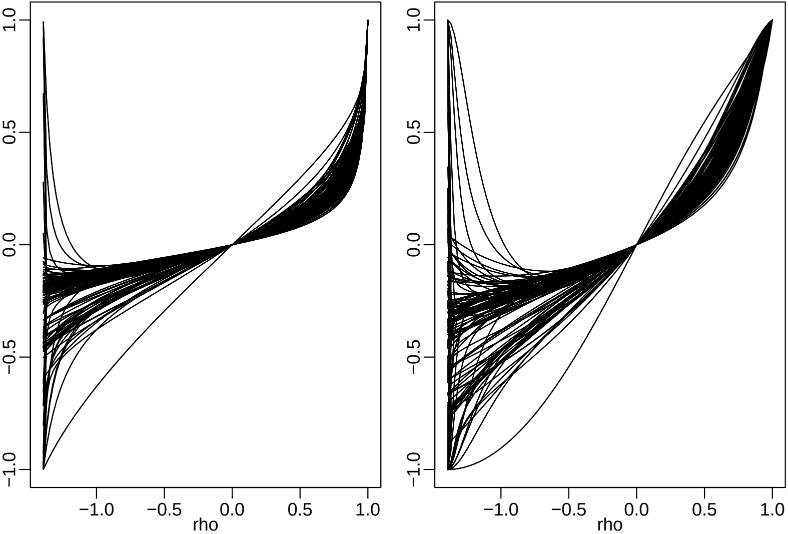
    onde $\epsilon_i \sim N(0, \tau_i^2)$
  - Modelo **CAR**: Não tem
- Distribuição conjunta
  - Modelo **SAR**:

$$\overline{Z} \sim N(0, (I - \rho W)^{-1} T (I - \rho W)^{-1'}) \tag{4}$$

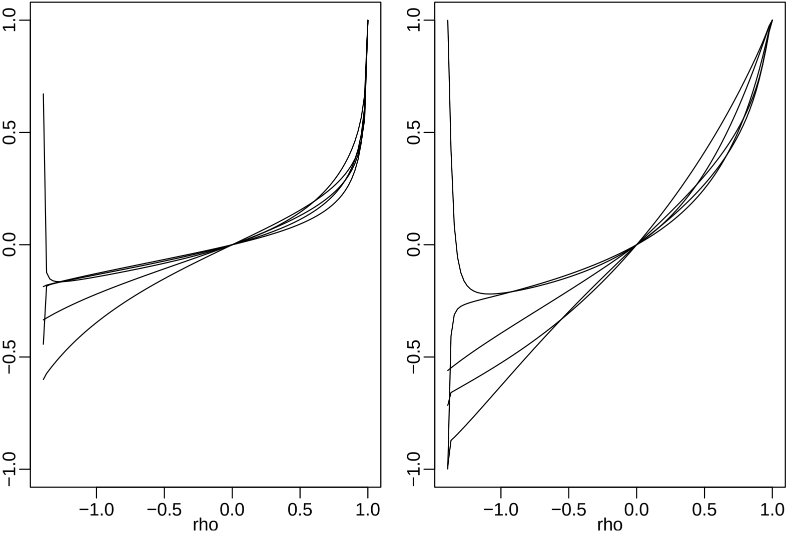
- Forma matricial
  - Modelo **SAR**:
$$Z_{n\times 1} = \rho_s W_{n\times n} Z + \epsilon \ , \qquad (3)$$
onde $\epsilon_i \sim N(0, \tau_i^2)$
  - Modelo **CAR**: Não tem
- Distribuição conjunta
  - Modelo **SAR**:
$$\overline{Z} \sim N(0, (I - \rho W)^{-1} T (I - \rho W)^{-1'}) \qquad (4)$$

- Modelo **CAR**: $\overline{Z} \sim N(0, (I - \rho W)^{-1} K)$

Correlações entre vizinhos: CAR (esquerda) e SAR (direita)



Correlações entre **alguns** vizinhos: CAR (esquerda) e SAR (direita)



Relação de Σ com ρ

- $\rho > 0$
  - $\text{Corr}(y_i,\ y_j)$ cresce se ρ cresce
  - $\text{Corr}(y_i,\ y_j)$ não tem posto constante a medida que ρ cresce
- $\rho < 0$
  - $\text{Corr}(y_i,\ y_j)$ pode ficar > 0 se ρ fica $+$ negativo
  - $\text{Corr}(y_i,\ y_j)$ pode tender a $+1$ se ρ fica muito negativo!

Aproximação

Aproximação

- Temos que

$$\begin{aligned} (I - \rho W)^{-1} &= I + \rho W + \rho^2 W^2 + ... \\ &\approx I + \rho W + \rho^2 W^2 + ... + \rho^p W^p \end{aligned} \quad (5)$$

Aproximação

- Temos que

$$\begin{aligned}(I-\rho W)^{-1} &= I+\rho W+\rho^2 W^2+\dots \\ &\approx I+\rho W+\rho^2 W^2+\dots+\rho^p W^p\end{aligned} \tag{5}$$

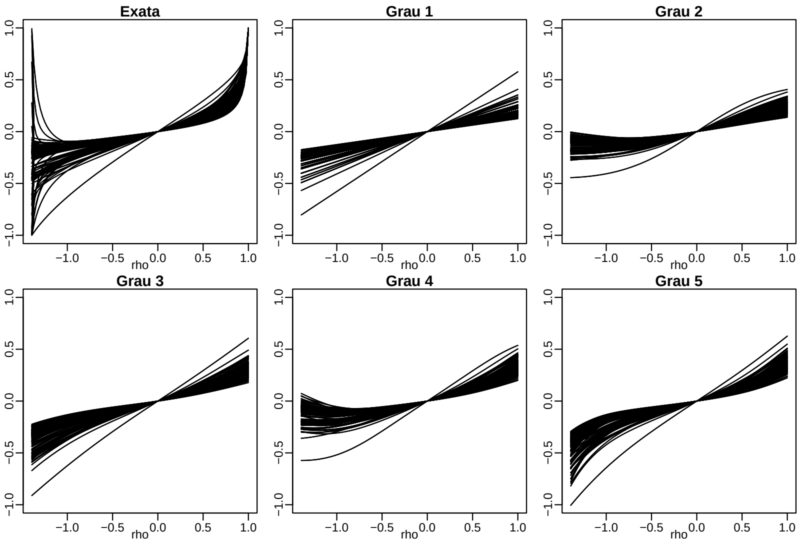
- Lembrando que

$$\Sigma(CAR) = (I-\rho W)^{-1} K \tag{6}$$

e

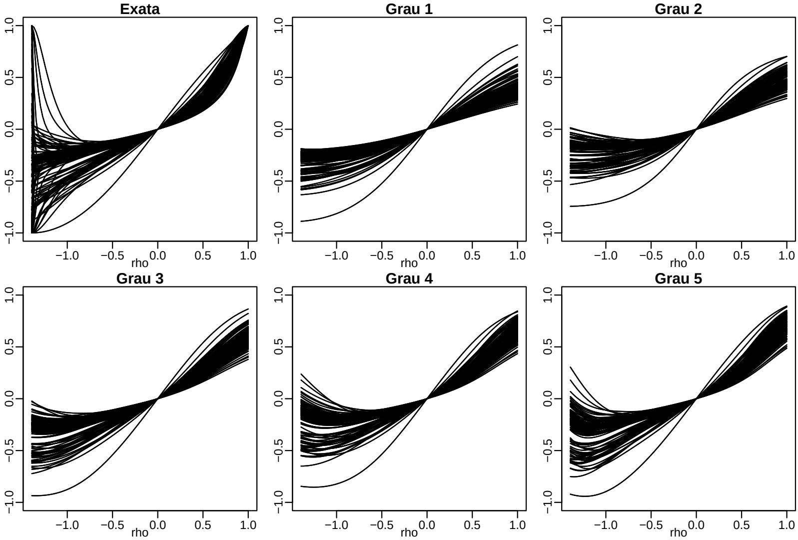
$$\Sigma(SAR) = (I-\rho W)^{-1} T (I-\rho W)^{-1'} \tag{7}$$

Correlações entre vizinhos - CAR



Nota-se que para ordem 1 é linear, pois $(I - \rho W)^{-1} \approx I + \rho W$

Correlações entre vizinhos - SAR



Nota-se que para SAR a aproximação é melhor

Passeio aleatório em grafos

Passeio aleatório em grafos

- Conside um passeio aleatório pelas regiões do mapa

Passeio aleatório em grafos

- Conside um passeio aleatório pelas regiões do mapa
- A probabilidade de mudar de i para qualquer estado vizinho é $1/(n^o vizi)$

Passeio aleatório em grafos

- Conside um passeio aleatório pelas regiões do mapa
- A probabilidade de mudar de i para qualquer estado vizinho é $1/(n^o vizi)$
- O elemento (i,j) de W^k é a probabilidade de ir de i para j em k passos

Passeio aleatório em grafos

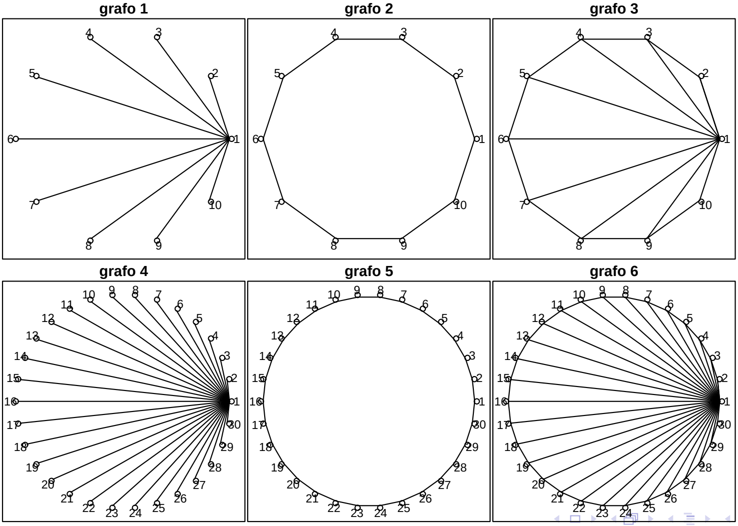
- Conside um passeio aleatório pelas regiões do mapa
- A probabilidade de mudar de i para qualquer estado vizinho é $1/(n^o vizi)$
- O elemento (i,j) de W^k é a probabilidade de ir de i para j em k passos
- Convergência de W^k

Passeio aleatório em grafos

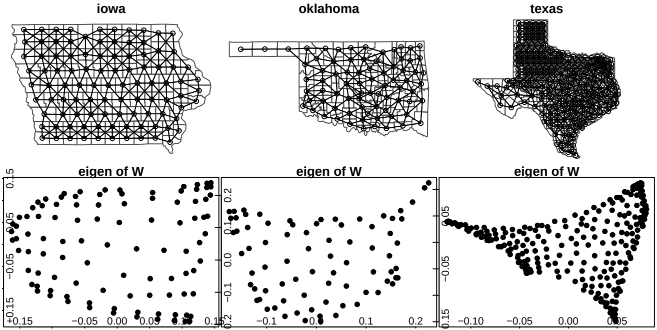
- Conside um passeio aleatório pelas regiões do mapa
- A probabilidade de mudar de i para qualquer estado vizinho é $1/(n^o vizi)$
- O elemento (i,j) de W^k é a probabilidade de ir de i para j em k passos
- Convergência de W^k
- O segundo maior autovalor em módulo da matriz W está associado á convergencia

Exemplos ...

grafo1	grafo2	grafo3	grafo4	grafo5	grafo6
-0.9000	0.8090	-0.6510	-0.9667	0.9781	-0.6639



Alguns grafos de microregiões nos EUA e gráfico de dispersão entre o 1^o e 2^o autovetores



Iowa	Oklahoma	Texas
0.9717	0.9634	0.9917