# UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
# CE080 - FUNDAMENTOS BÁSICOS PARA ESTATÍSTICA

**Primeira lista de Exercícios (Determinantes)**

PSE 2012 - 27/04/2012 - Professora Fernanda

1. Resolva as seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & 5 \\ x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

2. Calcule o valor de cada um dos seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{vmatrix}$

3. Calcule o valor de $x$, de forma que o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 9 & 4 \\ 6 & x & x-7 \end{bmatrix}$ seja nulo.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & k \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix}$ e determine $k$ para o qual o determinante da matriz A é nulo.

5. Calcular pela regra de Sarrus o determinante $D = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$.

6. Provar, sem desevolver os determinantes que $\begin{vmatrix} bc & 1 & a \\ ac & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

7. Calcule os seguintes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

8. Calcule $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

9. Calcule o determinante $D = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & d \\ 0 & b & c & d \end{vmatrix}$.

10. Sendo $x$ e $y$, respectivamente, os determinantes das matrizes não singulares $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2a & 2c \\ -3b & 3d \end{bmatrix}$, calcule $\frac{y}{x}$.

11. Calcule os determinantes pela regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 11 \\ -2 & 1 & 13 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 0 & a & c \\ -c & 0 & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ m & n & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

12. Determine $x$ tal que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & 2x & 1 \\ 3 & x+1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & x \\ 1 & -x & 1 \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ -2 & x & -4 \\ 1 & -3 & -x \end{vmatrix} = 0$

13. Chama-se traço de uma matriz quadrada a soma dos elementos da diagonal principal. Sabendo-se que o traço vale 9 e o determinante 15, calcule os elementos $x$ e $y$ da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$.

14. Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$; calcule $D_{13}$, $D_{24}$, $D_{32}$ e $D_{43}$.

15. Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; calcule $A_{11}$, $A_{22}$, $A_{33}$ e $A_{44}$.

16. Determine o cofator do elemento $a_{23}$ da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

17. Calcule os determinantes das matrizes abaixo utilizando o teorema de Laplace:

a) $M = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ b) $M = \begin{vmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{vmatrix}$ c) $M = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

18. Prove que os determinantes abaixo são múltiplos de 12, sem desenvolvê-los.

a) $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 11 \\ 4 & 8 & 12 & 8 \\ 10 & 5 & 9 & 13 \\ 14 & 7 & -3 & 15 \end{vmatrix}$ b) $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 11 & 15 \\ 5 & 13 & 25 \end{vmatrix}$

19. $A$ é uma matriz quadrada de ordem 4 e $detA = -6$. Calcule o valor de $x$ tal que $det(2A) = x - 97$.

20. Sem desenvolver, diga por que o valor dos determinantes abaixo é zero.

a) $\begin{vmatrix} a & ab & a & a^2b \\ b & bc & b & c \\ c & cd & c & b \\ d & ad & d & d \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & xy & x^2y \\ y & yz & xyz \\ z & xz & x^2z \end{vmatrix}$

21. Sem desenvolver nenhum dos determinantes, prove que $D' = 8D$, sabendo que:

$D = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & x^4 \\ y & y^2 & y^3 & y^4 \\ z & z^2 & z^3 & z^4 \\ t & t^2 & t^3 & t^4 \end{vmatrix}$ e $D' = \begin{vmatrix} 8x & -2x^2 & 2x^3 & -2x^4 \\ 4y & -y^2 & y^3 & -y^4 \\ 4z & -z^2 & z^3 & -z^4 \\ 4t & -t^2 & t^3 & -t^4 \end{vmatrix}$.

22. Demonstre sem desenvolver o determinante que: $\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} = 0$

23. Prove que: $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)(x-y)$

24. Demonstre a identidade: $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^2)$

25. Seja $u = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 0 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$. Determine os valores reais de x, para os quais $u^2 - 2u + 1 = 0$.

26. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule o valor do determinante de $A^{-1}$.

27. Sejam A, B, C matrizes reais de ordem 3 que satisfazem as seguintes relações $AB = C^{-1}$, $B = 2A$. Se o determinante de C é 32, qual é o valor do módulo do determinante de A?

28. Calcule o valor do determinante $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & b \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$

29. Determine o conjunto solução da equação $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 4 & 5 \\ x & x & x & 6 \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = 0$

30. Calcule os determinantes: a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$

31. Calcule os determinantes, com auxílio da regra de Chió. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ yz & xz & xy \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

32. Calcule os determinantes: a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 25 & 49 \\ 8 & 27 & 125 & 343 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -3 & 6 & 12 \\ -1 & 3 & 5 \\ -1 & 9 & 25 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & a^2 \\ a^2 & b^2 & a^4 \end{vmatrix}$

33. Calcule, usando a teoria de matriz adjunta, as inversas das seguintes matrizes: $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -10 & 5 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

34. Para que valores reais de $m$ existe a inversa da matriz $A = \begin{bmatrix} m & 5 \\ 5 & m \end{bmatrix}$?

35. Qual a condição sobre $a$ para que a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$ seja inversível?

Respostas:

1. a) $\frac{-1}{5}$ b) -1 e 6
2. a) 20 b) -25 c) -144
3. 13
4. $\frac{3}{2}$
5. D=2abc
7. a) -208 b) 3 c) 84
8. -50
9. 3abcd

10. -6
11. a) 121 b) $b(a^2 - c^2)$ c) 4m+8n-26
12. a) $x = \frac{1}{2}$ b) $x = 0$ ou $x = 1$ c) $x = 0$ ou $x = -2$
13. $x = 3$ $y = 5$ (ou vice-versa)
14. $D_{13} = -25$, $D_{24} = 6$, $D_{32} = -19$ e $D_{43} = -4$
15. $A_{11} = 1$, $A_{22} = -41$, $A_{33} = -9$ e $A_{44} = 29$
16. -2
17. a) -208 b) $a^2 + b^2$ c) 48
19. $x = 1$
20. a) primeira e terceira colunas iguais b) segunda e terceira colunas proporcionais
25. x=1 ou x=-1
26. $det A^{-1} = -\frac{1}{2}$
27. $det A = -\frac{1}{16}$
28. $a(a-b)^3$
29. $S = 0, 1, 4, 6$
30. a) 281 b)30 c) -24
31. a) $(x-y)(z-x)(y-z)$ b) $(a+b+c)(b-a)(a-c)(b-c)$ c)$(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$
32. a) 240 b) -42 c) $(a^2-a)(a^2-b)(b-a)$
33. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 5 \end{bmatrix}$ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/15 \\ 2/3 & 7/15 \end{bmatrix}$ $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ $D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 16 & -7 & 1 \end{bmatrix}$
34. $m \neq 5$ e $m \neq -5$
35. $a \neq 1$ e $a \neq -\frac{1}{2}$